

2023年度 開智中学校・先端 A (問題)

4 次の【条件】をみたす整数について考えます。

【条件】

3けたの整数の中で、各位のいずれかに1が入っていること

例えば、123や511は【条件】をみたしています。

- (1) 【条件】をみたす整数はいくつありますか。
- (2) 【条件】をみたす奇数はいくつありますか。
- (3) 【条件】をみたす、すべての奇数の和とすべての偶数の和を考えます。

このとき、奇数の和の方が、偶数の和より だけ大きいです。

にあてはまる数を答えなさい。

2023年度 開智中学校・先端 A (解説)

4

- (1) 3桁の整数は百の位の数は1～9の9通りあり、そのそれぞれについて、十の位、一の位の数は0～9の10通りずつあるので、全部で $9 \times 10 \times 10 = 900$ 個ある。
 そのうち、1が一つも入っていない整数は、百の位の数が0、1以外の8通り、十の位、一の位が1以外の9通りあるので、全部で $8 \times 9 \times 9 = 648$ 個ある。
 よって、【条件】を満たす数は $900 - 648 = \underline{252}$ 個 あります。
- (2) 3桁の偶数は百のくらは1～9の9通り、十の位は0～9の10通り、一の位は0、2、4、6、8の5通りあるので、全部で $9 \times 10 \times 5 = 450$ 通り。
 そのうち、1が一つも入っていない整数は、百のくらが0、1以外の8通り、十の位が1以外の9通り、一の位が0、2、4、6、8の5通りあるので、全部で $8 \times 9 \times 5 = 360$ 通りある。
 よって、1が各位のいずれかに入っている偶数は $450 - 360 = 90$ 個ある。
 これと(1)の結果から、【条件】を満たす奇数は $252 - 90 = \underline{162}$ 個 あります。
- (3) 3桁の整数は100～999の $999 - 100 + 1 = 900$ 個あるので、合計は $(100 + 999) \times 900 \div 2 = 1099 \times 450 = 494550$ 。
 そのうち1が一つも入っていない数の合計を位ごとに足していくと…
 百の位の数の合計は $200 \times 9 \times 9 + 300 \times 9 \times 9 + \dots + 900 \times 9 \times 9$
 $= (200 + 300 + \dots + 900) \times 9 \times 9$
 同様に十の位、一の位の合計を足していくと、
 $(200 + 300 + \dots + 900) \times 9 \times 9 + (20 + 30 + \dots + 90) \times 8 \times 9$
 $+ (2 + 3 + \dots + 9) \times 8 \times 9$
 $4400 \times 81 + 440 \times 72 + 44 \times 72 = 44 \times (8100 + 720 + 72)$
 $= 44 \times 8892 = 391248$ 。
 よって、【条件】を満たす整数の和は $494550 - 391248 = 103302 \dots (7)$ 。
 また、3桁の偶数は100～998の $(998 - 100) \div 2 + 1 = 900 \div 2 + 1 = 450$ 個あるので
 合計は $(100 + 998) \times 450 \div 2 = 1098 \times 225 = 247050$ 。
 そのうち、偶数の和は
 $(200 + 300 + \dots + 900) \times 9 \times 5 + (20 + 30 + \dots + 90) \times 8 \times 5$
 $+ (2 + 4 + 6 + 8) \times 8 \times 5$
 $= 4400 \times 45 + 440 \times 40 + 20 \times 72$
 $= 44 \times (4500 + 400) + 1440 = 44 \times 4900 + 1440$
 $= 215600 + 1440 = 217040$ 。
 よって、【条件】を満たす偶数の和は
 $247050 - 217040 = 30010 \dots (i)$ 。
 (7)、(i)より【条件】を満たす奇数の和は $103302 - 30010 = 73292$ 。
 したがって、【条件】を満たす奇数の和は、【条件】を満たす偶数の和より
 $73292 - 30010 = \underline{43282}$ だけ大きいです。