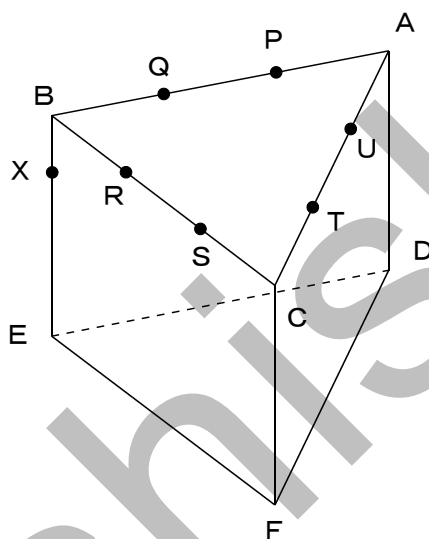


2023年度 豊島岡女子学園中学校(問題)

- 6 下の図のように、全ての辺の長さが等しく体積が 1cm^3 の正三角柱 $ABC-DEF$ があります。辺 AB , BC , CA を 3 等分する点をそれぞれ P , Q , R , S , T , U とし、辺 BE を 4 等分する点で B に最も近い点を X とします。また、3 つの点 P , S , E を通る平面を (あ), 3 つの点 R , U , F を通る平面を (い), 3 つの点 P , S , E を通る平面を (う), 点 X を通り底面 DEF に平行な平面を (え) とします。このとき、次の各問いに答えなさい。



- (1) 正三角柱 $ABC-DEF$ を平面 (あ) で切ったとき、底面 DEF を含む立体の体積は何 cm^3 ですか。
- (2) 正三角柱 $ABC-DEF$ を平面 (あ), (い) で切ったとき、底面 DEF を含む立体の体積は何 cm^3 ですか。
- (3) 正三角柱 $ABC-DEF$ を平面 (あ), (い), (う), (え) で切ったとき、底面 DEF を含む立体の体積は何 cm^3 ですか。

2023年度 豊島岡女子学園中学校(解説)

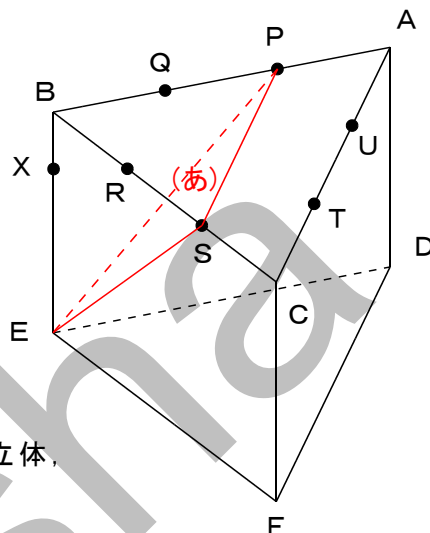
6

- (1) 平面(あ)で切った後、小さい方の立体は三角すいで、この三角すいともとの三角柱について、底面の $\triangle B S P$ と $\triangle B C A$ は相似で相似比は $2:3$ なので、面積比は $2 \times 2 : 3 \times 3 = 4:9$ 。
また、高さの比は $1:1$ なので、体積比は

$$4 \times 1 \times \frac{1}{3} : 9 \times 1 = \frac{4}{3} : 9 = 4:27。$$

よって、もとの三角柱と切断後の大きい方の立体、つまり、底面 $D E F$ を含む立体の体積比は $27:(27-4)=27:23$ 。

また、もとの三角柱の体積は 1cm^3 なので、
底面 $D E F$ を含む立体の体積は $1 \times \frac{23}{27} = \frac{23}{27}\text{cm}^3$ です。



- (2) (あ)が切り取る三角すいと、(い)が切り取る三角すいは合同で体積は(1)より、それぞれ $1 \times \frac{4}{27} = \frac{4}{27}\text{cm}^3$ 。

また、この2つの三角すいが重なる部分は右図で、 $\triangle O R S$ を底面とする高さ $M N$ の三角すい。

この三角すいについて、底面の $\triangle O R S$ は $\triangle A P U$ と合同。 $\triangle A P U$ は $\triangle A B C$ と相似で相似比は $1:3$ より、面積比は $1 \times 1 : 3 \times 3 = 1:9$ 。

また、 $\triangle R N S$ と $\triangle F E N$ が相似で、相似比が $1:3$ より、 $M N : C F = 1:(1+3)=1:4$ 。

よって、この重なる部分の三角すいともとの円柱の体積比は

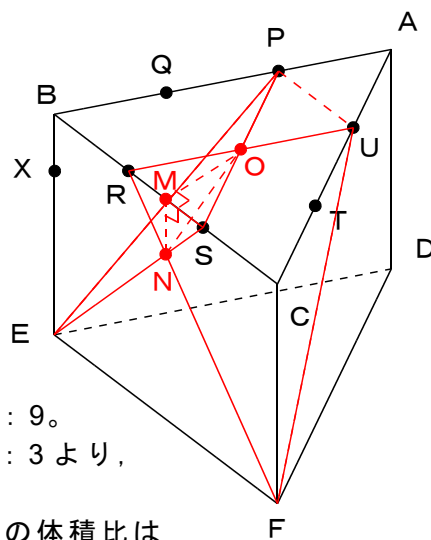
$$1 \times 1 \times \frac{1}{3} : 9 \times 4 = \frac{1}{3} : 36 = 1:108 \text{ となるので、重なる部分の体積は}$$

$$1 \times \frac{1}{108} = \frac{1}{108}\text{cm}^3。$$

したがって、(あ)と(い)によって、切り取られる小さい方の部分の体積は

$$\frac{4}{27} \times 2 - \frac{1}{108} = \frac{8}{27} - \frac{1}{108} = \frac{32}{108} - \frac{1}{108} = \frac{31}{108}\text{cm}^3 \text{ となるので、残る大きい方の立体}$$

$$\text{の体積は } 1 - \frac{31}{108} = \frac{77}{108}\text{cm}^3 \text{ です。}$$



- (3) もとの三角柱を(あ), (い), (う)で
切り取ると, 右図の斜線部分の3つの
三角すいが重なるので, 切り取る立体の

$$\begin{aligned} \text{体積は } & \frac{4}{27} \times 3 - \frac{1}{108} \times 3 \\ & = \frac{4}{9} - \frac{1}{36} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12} \text{ cm}^3。 \end{aligned}$$

さらに, (え)で切り取ると, この体積が

$$\frac{5}{12} \text{ cm}^3 \text{ の立体から, 右図で,}$$

底面が $\triangle HNG$ で頂点がOの三角すいが切り取られる。

$\triangle HNG$ は右下図の, 斜線部分の三角形と合同なので

面積は $\triangle ABC$ の $\frac{1}{4}$ 。また, 高さはBXに等しく

もとの三角柱の $\frac{1}{4}$ なので, この三角すいの

$$\text{体積は } 1 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{48} \text{ cm}^3。$$

よって切り取られる立体の体積は全部で

$$\frac{5}{12} + \frac{1}{48} = \frac{21}{48} = \frac{7}{16} \text{ cm}^3。$$

したがって, 残る底面DEFを含む方の立体の体積は

$$1 - \frac{7}{16} = \frac{9}{16} \text{ cm}^3 \text{ です。}$$

