

2023年度 桜蔭中学校(問題)

IV 1辺が10cmの立方体があります。図1のように、2つの面に①と②と名前をつけます。さらに、面①には半径1cmの円Aがあり、上から見ると図2のようになっています。

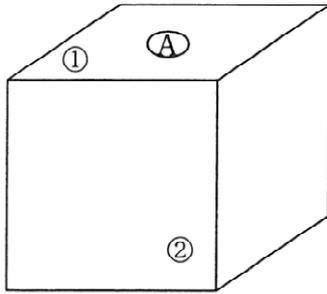


図1

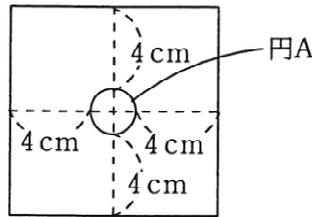


図2

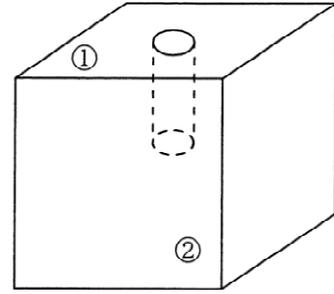


図3

円Aは面①に対して垂直に、秒速1cmで向かい合う面まで動きます。このとき、円Aが通過した部分を立方体からくり抜いてできる立体について考えます。ただし、円Aの厚さは考えないものとします。例えば円Aが動き始めてから5秒後の立体は図3のように、立方体から底面の半径が1cm、高さが5cmの円柱をくり抜いてできる立体です。

(1) 円Aが動き始めてから7秒後の立体の体積を求めなさい。

さらに面②にはたて4cm、横2cmの長方形Bがあり、正面から見ると図4のようになっています。長方形Bは円Aと同時に出発し、面②に対して垂直に、向かい合う面まで動きます。円Aが通過した部分に加えて、長方形Bが通過した部分も立方体からくり抜いてできる立体について考えます。ただし、長方形Bの厚さも考えないものとし、円Aと長方形Bはおたがいにぶつかっても止まることなく動き続けるものとします。

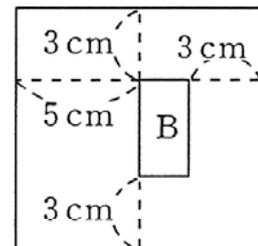


図4

(2) 長方形Bの動く速さは秒速2cmとします。

円Aと長方形Bが動き始めてから3秒後と5秒後の立体の体積をそれぞれ求めなさい。

(3) 長方形Bの動く速さは秒速0.625cmとします。

円Aと長方形Bが動き始めてから8秒後の立体の体積を求めなさい。

(4) 円Aと長方形Bが動き始めてから9秒後の立体の体積が 920.42cm^3 であるとき、長方形Bの動く速さを求めなさい。

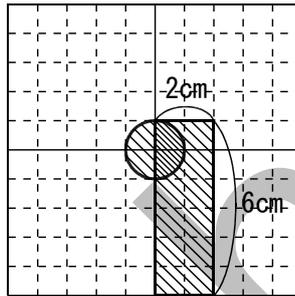
2023年度 桜蔭中学校(解説)

4

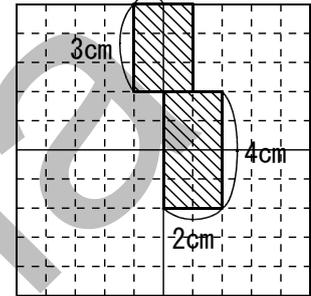
- (1) 7秒後，円Aは $1 \times 7 = 7\text{cm}$ 移動するので，円Aによる穴の体積は
 $1 \times 1 \times 3.14 \times 7 = 21.98\text{cm}^3$ 。
 よって，立体の体積は $10 \times 10 \times 10 - 21.98 = 1000 - 21.98 = \underline{978.02\text{cm}^3}$ です。

- (2) 3秒後，円Aは $1 \times 3 = 3\text{cm}$ 移動し，長方形Bは $2 \times 3 = 6\text{cm}$ 移動するので，3秒後の穴を真上からと正面から見ると右図のようになる。つまり，穴は3辺が2cm，4cm，6cmの直方体の上に底面の円の半径が1cm，高さが3cmの円柱のついた形をしているので，

真上から



正面から

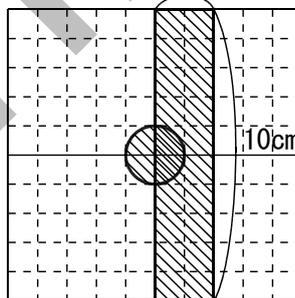


$$2 \times 4 \times 6 + 1 \times 1 \times 3.14 \times 3 = 48 + 9.42 = 57.42\text{cm}^3$$

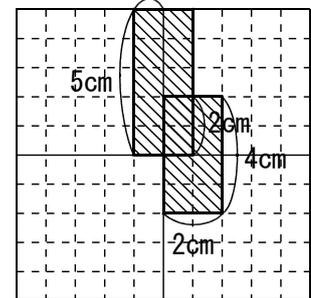
よって，3秒後の立体の体積は
 $10 \times 10 \times 10 - 57.42 = 1000 - 57.42 = \underline{942.58\text{cm}^3}$ です。

- また，5秒後，円Aは $1 \times 5 = 5\text{cm}$ 移動し，長方形Bは $2 \times 5 = 10\text{cm}$ 移動するので5秒後の穴を真上からと正面から見ると，右図のようになる。

真上から



正面から



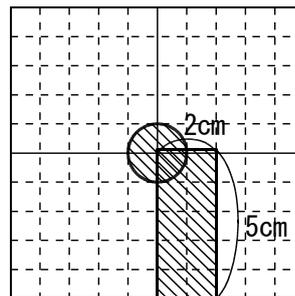
円Aによる穴は底面の円の半径1cm，高さ5cmの円柱，長方形Bによる穴は，3辺が2cm，4cm，10cmの直方体となるが，底面が半径1cmの半円で，高さが2cmの柱体が重なるので，穴の体積は

$$1 \times 1 \times 3.14 \times 5 + 2 \times 4 \times 10 - (1 \times 1 \times 3.14 \div 2) \times 2 = (5 - 1) \times 3.14 + 80 = 12.56 + 80 = 92.56\text{cm}^3$$

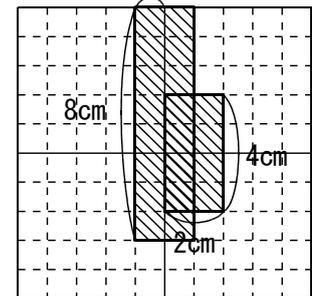
よって，5秒後の立体の体積は $10 \times 10 \times 10 - 92.56 = \underline{907.44\text{cm}^3}$ です。

- (3) 8秒後，円Aは $1 \times 8 = 8\text{cm}$ ，長方形Bは $0.625 \times 8 = 5\text{cm}$ 移動するので8秒後の穴を真上からと正面から見ると右図のようになる。

真上から



正面から



円Aによる穴は底面の半径1cm，高さ8cmの円柱，長方形Bによる穴は3辺が2cm，4cm，5cmの直方体となるが，底面が半径1cm，中心角 90° のおうぎ形で，高さが4cmの柱体が重なるので，穴の体積は

$$1 \times 1 \times 3.14 \times 8 + 2 \times 4 \times 5 - (1 \times 1 \times 3.14 \div 4) \times 4 = (8 - 1) \times 3.14 + 40 = 21.98 + 40$$

$= 61.98\text{cm}^3$ となるので、立体の体積は $10 \times 10 \times 10 - 61.98 = \underline{938.02\text{cm}^3}$ です。

(4) 9秒後、円Aは $1 \times 9 = 9\text{cm}$ 移動する。

立体の体積は 920.42cm^3 で、
 (3)より小さいので、
 長方形Bが右図のように、 5cm
 進んだとすると、
 穴の体積は

$$\begin{aligned} & 1 \times 1 \times 3.14 \times 9 + 2 \times 4 \times 5 \\ & - (1 \times 1 \times 3.14 \div 2) \times 4 \\ & = (9 - 2) \times 3.14 + 40 \\ & = 21.98 + 40 = 61.98\text{cm}^3 \end{aligned}$$

立体の体積は

$10 \times 10 \times 10 - 61.98 = 938.02\text{cm}^3$ となり、実際の方が
 $938.02 - 920.42 = 17.6\text{cm}^3$ 小さい。

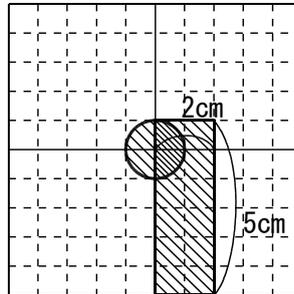
長方形Bが右上図の状態からさらに 1cm 進むごとに体積は $4 \times 2 \times 1 = 8\text{cm}^3$ 減るので
 実際に長方形Bが9秒間に進んだ距離は

$$5 + 17.6 \div 8 = 5 + 2.2 = 7.2\text{cm}.$$

よって、長方形Bの動く速さは $7.2 \div 9 = 0.8\text{cm/秒}$ 。

つまり、秒速 0.8cm です。

真上から



正面から

