

2023年度 逗子開成中学校(問題)

- 5 太郎さんと花子さんは整数の約数の個数について話し合っています。2 人の会話を読んで、次の各問いに答えなさい。ただし、整数 M の約数の個数を $\langle M \rangle$ という記号で表すことにします。

太郎：花子さん、いろいろな数の約数の個数を調べてみようよ。

花子：じゃあ、7, 15, 56 の 3 つの数について考えてみましょう。

太郎：7 の約数は、「1 と 7」だから $\cdots \langle 7 \rangle = 2$ になるね。

15 の約数は「1, 3, 5, 15」だから $\cdots \langle 15 \rangle = 4$ になるね。

56 の約数は「1, 2, 4, 7, 8, 28, 56」だから $\cdots \langle 56 \rangle = 7$ かな？

花子：太郎さん、56 の約数を 1 つ見落としてるよ！

わたしは見落とさないように、求めた約数どうしでペアを組んでかけ算をして、56 になることを確認しているんだ！

$1 \times 56, 2 \times 28, 4 \times ?, 7 \times 8$

4 の相手がいないから、14 を見落としているよ。

だから、 $\langle 56 \rangle = 8$ だよ。

太郎：そうか！約数を見つけるには、約数どうしペアを組んでいけばわかりやすいね！そうすると、いままでに調べた整数の約数には必ずペアができているから、どんな整数でも約数の個数は、偶数になるね。

花子：本当にそうかな $\cdots$

例えば、 $\langle 36 \rangle$ は $\cdots \langle 36 \rangle = 9$ になるよ！

太郎：なんで偶数にならないんだろう $\cdots$ (7) 約数の個数が奇数になるのはどのようなときなんだろう $\cdots$

- (1) $\langle 180 \rangle$ の値を求めなさい。
- (2) $\langle M \rangle = 4$ になる整数 M のうち、6 番目に小さい整数 M を求めなさい。
- (3) 文中の下線部 (7) を参考にして、 $\langle M \rangle = 7$ になる 900 未満の整数のうち、最も大きい整数を求めなさい。ただし、答えだけでなく途中の考え方も書きなさい。

2023年度 逗子開成中学校(解説)

5

- (1) 180 の約数の組を作ると、
(1, 180), (2, 90), (3, 60), (4, 45), (5, 36), (6, 30), (9, 20),
(10, 18), (12, 15) の 9 組できるので、
全部で $2 \times 9 = 18$ 個。
よって、 $\langle 180 \rangle = \underline{18}$ です。
- (2) 約数が 4 個ある数を素因数分解すると、
 $6 \rightarrow 1, 2, 3, 6$ で $6 = 2 \times 3$ または、
 $8 \rightarrow 1, 2, 4, 8$ で $8 = 2 \times 2 \times 2$ 。
よって、約数が 4 個ある数は、素因数分解すると、
 $a \times b$ (a, b は異なる素数) または、 $a \times a \times a$ (a は素数)。
よって、小さい方から、
 $6, 8, 10 = 2 \times 5, 14 = 2 \times 7, 15 = 3 \times 5, 21 = 3 \times 7, \dots$
となるので、6 番目に小さいのは 21 です。
- (3) 約数が 7 個ある数を素因数分解すると、
 $64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ で、
同じ素数を 6 個かけた数。
 $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 729$,
 $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 15625$ となるので、
900 以下で、最も大きい数は 729 です。