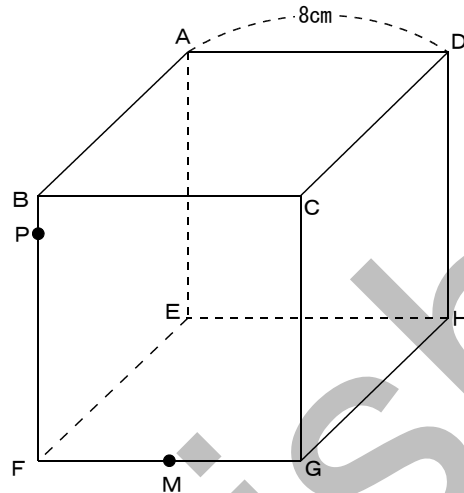
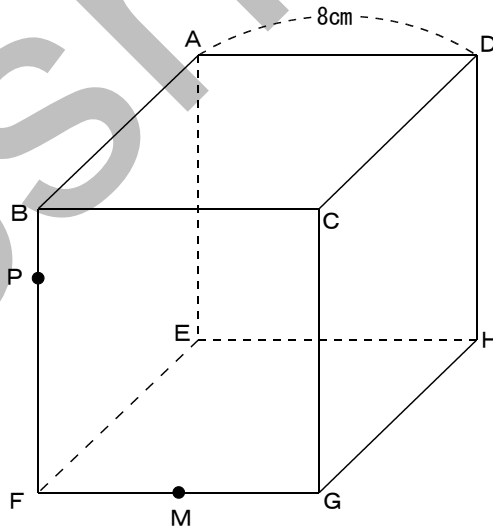


2023年度 東京都市大学付属中学校(問題)

- 5 下の図は 1 辺の長さが 8cm の立方体です。点 M は辺 F G のちょうど真ん中の点で、点 P が辺 B F 上を動くとき、あとの問いに答えなさい。



- 問 1 $BP = 2\text{cm}$ のとき、3 点 A, P, M を通る平面で立方体を切ったときの切り口を解答用紙の図にかき入れなさい。



- 問 2 $BP = 6\text{cm}$ のとき、3 点 A, P, M を通る平面で立方体を切り、立方体を 2 つの立体に分けました。この 2 つの立体のうち、点 E を含む立体について、切り口以外の面の面積の和は何 cm^2 ですか。
- 問 3 3 点 A, P, M を通る平面で立方体を切り、点 E を含む立体を立体 ㊦ とします。
($BP = 2\text{cm}$ のときの立体 ㊦ の体積) : ($BP = 6\text{cm}$ のときの立体 ㊦ の体積) を、最も簡単な整数の比で表しなさい。

2023年度 東京都市大学付属中学校(解説)

5

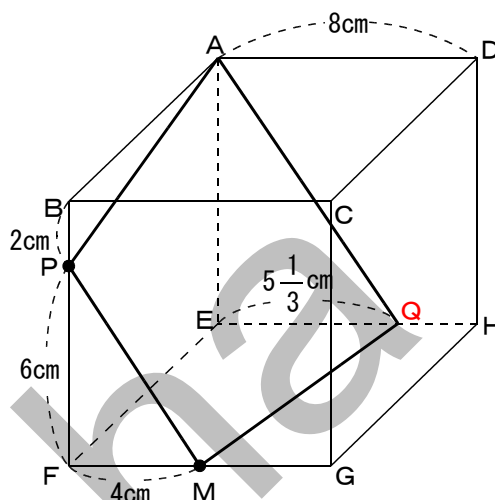
(問 1) 右図において、切り口の直線はまず、 AB と PM となる。
また、面 $A E H D$ の切り口の直線は PM と平行になるので、辺 $E H$ との交点を Q とすると、

$$P F : F M = (8 - 2) : (8 \div 2) \\ = 6 : 4 = 3 : 2 \text{ より,}$$

$A E : E Q = 3 : 2$ で、
 $A E = 8\text{cm}$ より、

$$E Q = 8 \times \frac{2}{3} = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3} \text{ cm.}$$

よって、切り口は、右図のように台形 $A P M Q$ となる。



(2) 右図において、切り口の直線はまず、 AP と PM となる。平面 $A E H D$ の切り口の直線は PM と平行になるので、直線 $E H$ ととの交点を I とすると、

$$P F : F M = (8 - 6) : 4 \\ = 1 : 2 \text{ より,}$$

$A E : E I = 1 : 2$ 。

$A E = 8\text{cm}$ より、

$E I = 8 \times 2 = 16\text{cm}$ と

なる。よって、 $H I = 16 - 8 = 8\text{cm}$ 、

$A D = 8\text{cm}$ より、 $\triangle A J D$ と $\triangle I F H$ は合同なので、

$J H = 8 \div 2 = 4\text{cm}$ となる。

また、面 $C G H D$ の切り口の直線は J を通り AP と平行になるので、

その切り口の直線と辺 $G H$ との交点を K とすると、

$J H : H K = P B : B A = 6 : 8 = 3 : 4$ で、 $J H = 4\text{cm}$ より、

$$H K = 4 \times \frac{4}{3} = \frac{16}{3} \text{ cm, } G K = 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3} \text{ cm となる。}$$

切断後、点 E を含む立体の切り口以外の面は、

台形 $A E F E$ 、 $\triangle P F M$ 、 $\triangle J K H$ 、台形 $A E H J$ 、五角形 $E F M K H$ なので、これらの面積の和は

$$\begin{aligned} & (2 + 8) \times 8 \div 2 + 2 \times 4 \div 2 + 4 \times \frac{16}{3} \times \frac{1}{2} + (8 + 4) \times 8 \div 2 \\ & + \left(8 \times 8 - 4 \times \frac{8}{3} \times \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 40 + 4 + \frac{32}{3} + 48 + \left(64 - \frac{16}{3}\right) \\
 &= 92 + \frac{32}{3} + \frac{176}{3} = 92 + \frac{208}{3} = 92 + 69\frac{1}{3} = 161\frac{1}{3} \text{ cm}^2 \quad \text{です。}
 \end{aligned}$$

(問 3) $BP = 2\text{cm}$ のとき…右図で、三角すい $L-AEQ$ と

三角すい $L-PFM$ は相似で、
 相似比は $6:8=3:4$ 。よって、体積比は
 $3 \times 3 \times 3 : 4 \times 4 \times 4 = 27:64$ 。
 また、 $LE:LF=4:3$ より、
 $LE:LF:FE=4:3:(4-3)=4:3:1$ で、
 $FE=8\text{cm}$ より、
 $LF=8 \times 3 = 24\text{cm}$ 。
 よって、三角すい $L-PFM$ の体積は
 $6 \times 4 \times \frac{1}{2} \times 24 \times \frac{1}{3} = 96\text{cm}^3$ 。

また、立体 $\textcircled{あ}$ は三角すい台
 $PFM-AEQ$ で、立体 $\textcircled{あ}$ と
 三角すい $L-PFM$ の体積比は
 $27:(64-27)=27:37$ なので、
 立体 $\textcircled{あ}$ の体積は

$$96 \times \frac{37}{27} = \frac{1184}{9} \text{ cm}^3 \quad \cdots (7)。$$

また、 $BP = 6\text{cm}$ のとき…

右図で、 $\triangle ABP$ と
 $\triangle NFP$ は相似で、
 $6:2=3:1$ なので、
 $NF=8 \times \frac{1}{3} = \frac{8}{3}\text{cm}$ 。

$$\begin{aligned}
 \text{よって、} EN &= 8 + \frac{8}{3} \\
 &= \frac{32}{3}\text{cm}。
 \end{aligned}$$

また、 $\triangle AEI$ と

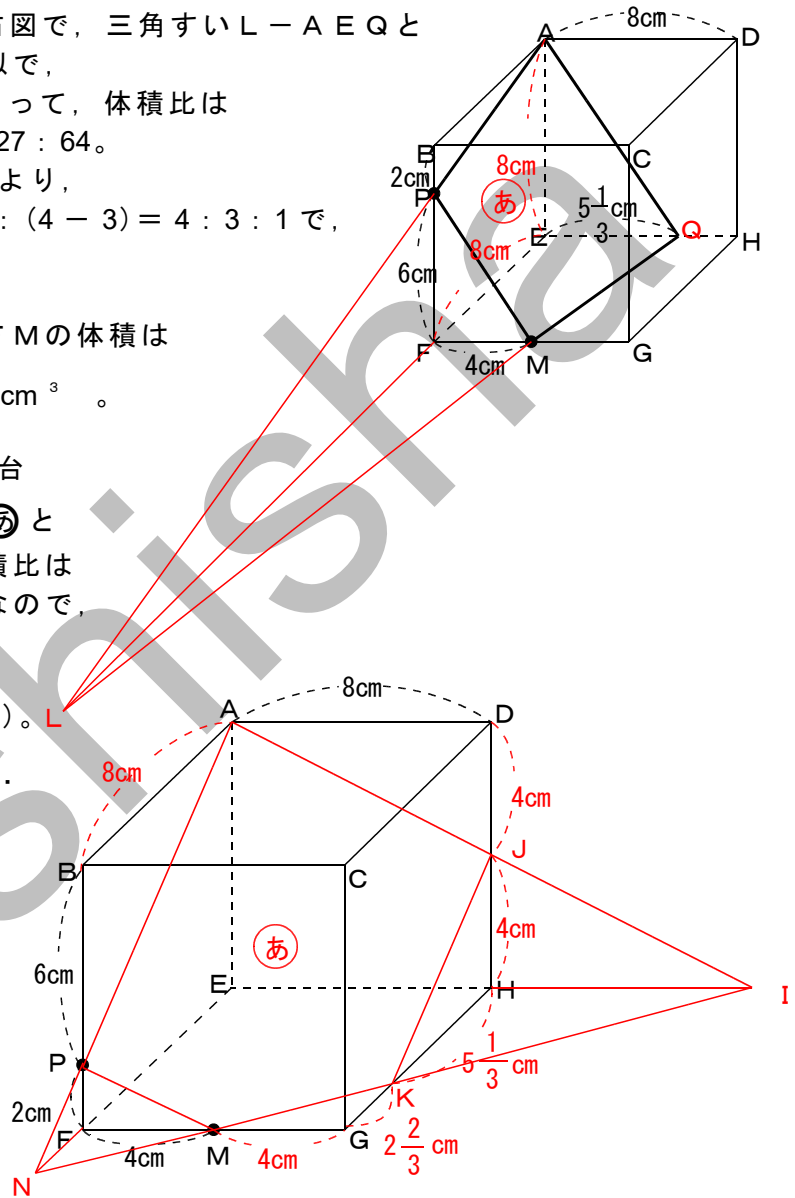
$\triangle JHI$ は相似で相似比は $8:4=2:1$ なので、
 $EI:HI:EH=2:1:(2-1)=2:1:1$ で、 $EH=8\text{cm}$ より、
 $EI=8 \times 2 = 16\text{cm}$ 。

$$\text{よって、三角すい } A-ENI \text{ の体積は } \frac{32}{3} \times 16 \times \frac{1}{2} \times 8 \times \frac{1}{3} = \frac{2048}{9} \text{ cm}^3。$$

また、三角すい $N-PFM$ は三角すい $A-ENI$ と相似で相似比は
 $PF:PE=2:8=1:4$ なので、体積比は $1 \times 1 \times 1 : 4 \times 4 \times 4 = 1:64$ 。

また、三角すい $I-JKH$ は三角すい $A-ENI$ と相似で相似比は

$$JH:AE=4:8=1:2 \text{ なので、体積比は } 1 \times 1 \times 1 : 2 \times 2 \times 2 = 1:8。$$



よって、立体の㉔の体積は $\frac{2048}{9} \times \left(1 - \frac{1}{64} - \frac{1}{8}\right) = \frac{2048}{9} \times \frac{55}{64} = \frac{1760}{9} \text{ cm}^3 \cdots (イ)$ となる。

したがって、(ア)と(イ)の比は

$$\frac{1184}{9} : \frac{1760}{9} = \frac{32 \times 37}{9} : \frac{32 \times 55}{9} = \underline{37 : 55} \text{ です。}$$