

2023年度 聖光学院中学校(問題)

- 5 「秒針」「分針(長針)」「時針(短針)」の3つの針がついた時計を考えます。それぞれの針が1周するのにかかる時間は、「秒針」が1分、「分針」が60分、「時針」は12時間です。

このとき、次の問いに答えなさい。

- (1) 「時針」と「分針」が重なってから、次にこれらの針が重なるまでにかかる時間は何分ですか。
- (2) 「時針」と「分針」と「秒針」が重なってから、次に「時針」と「分針」が重なるとき、これらの針と「秒針」がつくる小さいほうの角の大きさは360度の何倍ですか。

いま、「時針」と「分針」が1周するのにかかる時間はそのまま、「秒針」が1周するのにかかる時間を60秒から 秒にしたところ、3つの針が重なった状態から動かし始めて、次に「時針」と「分針」が重なるとき、ちょうど「秒針」もこれらの針に重なりました。ただし、 にあてはまる数は60より大きい数であるものとします。

- (3) にあてはまる数のうち、最も小さい数を答えなさい。
- (4) にあてはまる数のうち、最も小さい整数を答えなさい。

2023年度 聖光学院中学校(解説)

5

- (1) 時針，分針が回転する速さはそれぞれ 0.5° /分， 6° /分。

時針と分針が重なってから次に重なるまでに，分針は短針より 360 度多く回転するので，かかる時間は

$$360 \div (6 - 0.5) = 360 \div 5.5 = 360 \times \frac{2}{11} = \frac{720}{11} = 65\frac{5}{11} \text{ 分} \quad \text{です。}$$

- (2) 時針と分針と秒針が重なる最初の時刻を 0 時だとすると，

時針と分針が重なるのは 0 時の $65\frac{5}{11}$ 分後なので， 1 時 $5\frac{5}{11}$ 分。

このとき，時針と短針が 0 時の方向とつくる角は時針に着目すると

$$0.5 \times 65\frac{5}{11} = \frac{1}{2} \times \frac{720}{11} = \frac{360}{11}^\circ。$$

また，秒針の速さは 360° /分なので， 1 時 $5\frac{5}{11}$ 分に秒針が 0 時の方向とつくる角は

$$360 \times \frac{5}{11} = \frac{1800}{11}^\circ。$$

よって， 1 時 $5\frac{5}{11}$ 分において，時針(長針)と秒針がつくる角は

$$\frac{1800}{11} - \frac{360}{11} = \frac{1440}{11}^\circ。 \text{ となり，これは } \frac{1440}{11} = 130\frac{10}{11}^\circ < 180^\circ \text{ より，小さい方の角で，}$$

$$360^\circ \text{ の } \frac{1440}{11} \div 360 = \frac{4}{11} \text{ 倍} \quad \text{です。}$$

- (3) 秒針が， $65\frac{5}{11}$ 分 $= \frac{720}{11}$ 分で， $(\frac{360}{11} + 360 \times n)^\circ$ (n は整数)進めばよい。

$$\begin{aligned} \text{このときの秒針の分速は } & (\frac{360}{11} + 360 \times n) \div \frac{720}{11} = \frac{360}{11} \times \frac{11}{720} + 360 \times n \times \frac{11}{720} \\ & = \frac{1}{2} + \frac{11}{2} \times n = \frac{1+11 \times n}{2} \text{ /分} \cdots (7)。 \end{aligned}$$

1 周にかかる時間が 60 秒 $= 1$ 分より多いとき，分速は $360 \div 1 = 360^\circ$ /分より

遅いので， $\frac{1+11 \times n}{2} < 360$ より， $1 + 11 \times n < 360 \times 2 = 720$ となるので，

$n < (720 - 1) \div 11 = \frac{719}{11} = 65\frac{4}{11}$ 。よって、この範囲で最大の整数 n は 65 なので、

秒針が 1 周に 60 秒より多くかかるとき、最大の速さは

$$\frac{1+11 \times 65}{2} = \frac{716}{2} = 358^\circ / \text{分}。よって、\boxed{} \text{ にあてはまる最も小さい数は}$$

$$360 \div 358 = \frac{360}{358} = \frac{180}{179} \text{ 分}。つまり、60 \text{ 秒} \times \frac{180}{179} = \frac{10800}{179} = 60\frac{60}{179} \text{ 秒} \text{ です。}$$

(4) (7) より、(3) のとき秒針が 1 周にかかる時間は

$$360 \div \frac{1+11 \times n}{2} = 360 \times \frac{2}{1+11 \times n} = \frac{720}{1+11 \times n} \text{ 分}。$$

$$\text{つまり、} 60 \text{ 秒} \times \frac{720}{1+11 \times n} = \frac{43200}{1+11 \times n} \text{ 秒} \cdots (イ)。$$

65 以下の整数 n に対してこれが整数になるとき、 n の 1 の位は 9。

よって、 $n = 59, 49, 39, 29, 19, 9 \cdots$ となる。

$$n = 59 \text{ のとき} \cdots (イ) = \frac{43200}{1+11 \times 59} = \frac{43200}{650} = \frac{864}{13} \text{ となり、(イ) は整数にならない。}$$

$$n = 49 \text{ のとき} \cdots (イ) = \frac{43200}{1+11 \times 49} = \frac{43200}{540} = 80 \text{ 秒} \text{ となり整数になるので適する。}$$

よって、 $\boxed{}$ にあてはまる最も小さい整数は 80 です。