

2023年度 立教新座中学校(問題)

- 5 Nは4桁^{けた}の整数です。Nを各位の数の和でわった商をA，あまりをBとします。

例えば

・ Nが5633のとき， $5633 \div (5 + 6 + 3 + 3) = 331$ あまり6となり，
Aは331，Bは6

・ Nが2023のとき， $2023 \div (2 + 0 + 2 + 3) = 289$ あまり0となり，
Aは289，Bは0

となります。次の問いに答えなさい。

- (1) Aが最も大きくなるようなNは全部で何個ありますか。
- (2) Aが2番目に大きくなるようなNを求めなさい。
- (3) Aが99となるようなNのうち，最も小さいNを求めなさい。
- (4) Aが99，Bが0となるようなNを求めなさい。
- (5) Aが100となるようなNは全部で何個ありますか。

2023年度 立教新座中学校(解説)

5

- (1) 各位の和が 1, 2, 3, ... の各場合について, 商 A が最も大きくなるのは..
 $1000 \div 1 = 1000$, $2000 \div 2 = 1000$, $3000 \div 3 = 1000$, ..., $9000 \div 9 = 1000$,
 $9100 \div 10 = 910$, $9200 \div 11 = 836$ 余り 4, ... となるので,
 商 A の最大値は 1000 で, そのときの N は 1000, 2000, 3000, ..., 9000
 の 9 個 です。
- (2) 各位の和が 2, 3, 4, ... の各場合について, 商 A が 2 番目に大きくなるのは..
 $1100 \div 2 = 550$, $2100 \div 3 = 700$, $3100 \div 4 = 775$, $4100 \div 5 = 820$,
 $5100 \div 6 = 850$, $6100 \div 7 = 871$ 余り 3, $7100 \div 8 = 887$ 余り 4,
 $8100 \div 9 = 900$ となり, 各位の和が 2 ~ 9 の場合は 2 番に大きい数の最大値は 900。
 また, (1) より各位の和が 10 以上の場合最大値は $9100 \div 10 = 910$ の 910 なの
 で, A の 2 番目に大きい値は 910 で, そのときの N は 9100 です。
- (3) $1000 \div 10 = 100$ より, 各位の数の和が 10 の場合から調べると,
 各位の数の和が 10 のとき..
 最小の N は 1009 で, $1009 \div 10 = 100$ 余り 9 となり, B が 99 を超えるので
 残りはすべて 100 を超えるので不適当。
 各位の数の和が 11 のとき.. N が小さい方から調べると,
 $1019 \div 11 = 92$ 余り 7, $1028 \div 11 = 93$ 余り 5, $1037 \div 11 = 94$ 余り 3,
 $1046 \div 11 = 95$ 余り 1, $1055 \div 11 = 95$ 余り 10, $1064 \div 11 = 96$ 余り 8,
 $1073 \div 11 = 97$ 余り 6, $1082 \div 11 = 98$ 余り 4, $1091 \div 11 = 99$ 余り 2
 ..となり, $1091 \div 11$ が適する。
 よって, A が 99 になる最小の N は 1091 です。
- (4) A が 99 で B = 0 のとき, N は 99 の倍数。
 $N = 99 \times 10 = 990$ は 3 桁なので不適当。
 $N = 99 \times 11 = 1089$ は 4 桁だが各位の数の和: $1 + 0 + 8 + 9 = 18$ で
 11 ではないので, $A = N \div 18$ は 99 にならない。
 よって, 不適当。
 $N = 99 \times 12 = 1188$ とすると, 各位の数の和は $1 + 1 + 8 + 8 = 18$ で,
 12 ではないので不適当。
 $N = 99 \times 13 = 1287$ とすると, 各位の数の和は $1 + 2 + 8 + 7 = 18$ で,
 13 ではないので不適当。
 ここまでの結果で, $99 \times \square$ は各位の数の和が 18 になるので,
 $N = 99 \times 18 = 1782$ とすると, 各位の数の和は $1 + 7 + 8 + 2 = 18$ で,
 $N \div 18 = 99 = A$ となり適する。
 よって, 求める N は 1782 です。
- (5) $N \div (\text{各位の数の和}) = 100$ 余り B なので,
 $N = 100 \times (\text{各位の数の和}) + B$ で, B は各位の数の和より小さい。
 N は 4 桁なので,
 各位の数の和を 10 とすると.. $100 \times 10 = 1000$ で $1 + 0 + 0 + 0 = 1$

なので、各位の数の和が 10 になるには $10 - 1 = 9$ より、
 B は各位の数の和より小さいので、 $N = 1000 + 9 = 1009$ 。
 同様に、 $100 \times 11 = 1100$, $1 + 1 + 0 + 0 = 2$, $11 - 2 = 9$ より、
 $N = 1100 + 9 = 1109$ 。
 $100 \times 12 = 1200$, $1 + 2 + 0 + 0 = 3$, $12 - 3 = 9$ より、
 $N = 1200 + 9 = 1209$ 。
 $100 \times 13 = 1300$, $1 + 3 + 0 + 0 = 4$, $13 - 4 = 9$ より、
 $N = 1300 + 9 = 1309$ 。
 同様に、 $N = 1409, 1509, 1609, 1709, 1809, 1909$ が適する。
 ただし、 $100 \times 19 = 1900$, $1 + 9 + 0 + 0 = 10$, $19 - 10 = 9$ で、
 各位の数の和が 9 で 19 より小さくなる数は 9 と 18 があるので、
 $N = 1900 + 9 = 1909$ と $N = 1900 + 18 = 1918$ が適する。

また、 $100 \times 20 = 2000$, $2 + 0 + 0 + 0 = 2$, $20 - 2 = 18$ で、
 各位の数の和が 18 になる最小の数は 99 となり、20 より大きくなるの
 で不適当。
 $100 \times 21 = 2100$, $2 + 1 + 0 + 0 = 3$, $21 - 3 = 18$ となり、同様に
 不適当になる。
 よって、1918 より大きい数で適する数はないので、
 $A = 100$ となる N は
 $N = 1009, 1109, 1209, \dots, 1909, 1918$ の 11 個 です。