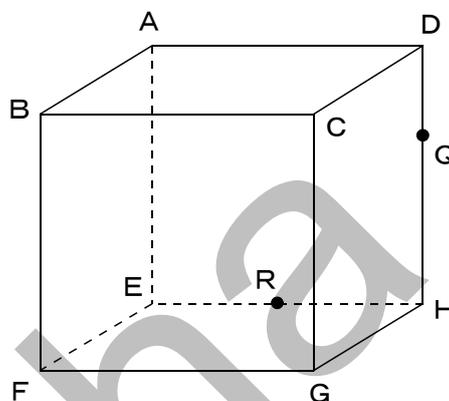


## 2023年度 本郷中学校(問題)

- 5 図のような1辺の長さが5cmの立方体 $ABCD-EFGH$ があり、辺 $DH$ を $DQ:QH=1:2$ に分ける点を $Q$ 、辺 $EH$ 上の真ん中の点を $R$ とします。このとき、次の問いに答えなさい。

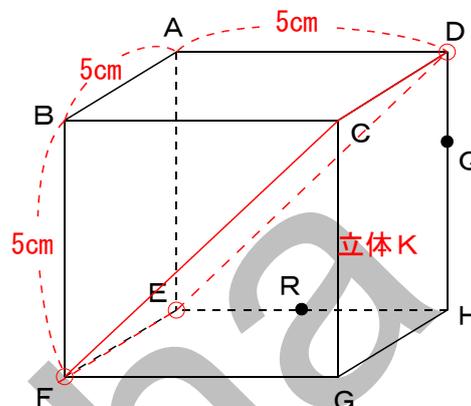


- (1) 点 $D$ 、 $E$ 、 $F$ を通る平面でこの立方体を切ったとき、頂点 $G$ を含む方の立体を $K$ と呼ぶことにします。このとき、立体 $K$ の体積は何 $\text{cm}^3$ ですか。
- (2) 点 $F$ 、 $Q$ 、 $R$ を通る平面で立方体 $ABCD-EFGH$ を切ったとき、切り口の図形として最も適するものを(ア)～(ク)の中から選びなさい。  
 (ア)三角形 (イ)二等辺三角形 (ウ)長方形 (エ)ひし形  
 (オ)五角形 (カ)六角形 (キ)正六角形 (ク)七角形
- (3) (1)で出来た立体 $K$ を点 $F$ 、 $Q$ 、 $R$ を通る平面で切ったとき、頂点 $G$ を含まない方の立体を $L$ と呼ぶことにします。このとき立体 $L$ の体積は何 $\text{cm}^3$ ですか。

## 2023年度 本郷中学校(解説)

5

- (1) 立体Kは、右図のように $\triangle CFG$ を底面とする高さ5cmの三角柱になり、体積はもとの立方体の体積の半分なので $5 \times 5 \times 5 \div 2 = \underline{62.5\text{cm}^3}$ です。



- (2) 立方体を平面FQRで切ったときの交線を調べる。

$$\text{右図で } RH : HQ = \frac{1}{2} : \frac{2}{3} = 3 : 4$$

なので、Fを通る面BFGC上の交線はRQと平行なので辺BCと交わり

その交点をSとすると、 $BS : BF = 3 : 4$ なので、

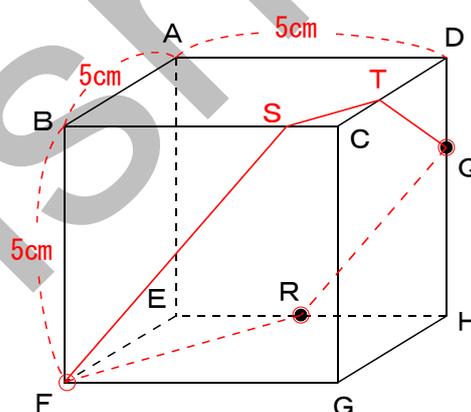
$$BS = 5 \times \frac{3}{4} = \frac{15}{4} \text{ cm.}$$

$$SC = 5 - \frac{15}{4} = \frac{5}{4} \text{ cm.}$$

また、Sを通る面ABCD上の交線はFRと平行なので、CDと交わりその交点をTとすると

立方体と平面FQRとの切り口は五角形QRFSTとなる。

よって、切り口は(オ)です。



- (3) まず、立方体を平面FQRで切断後、頂点Gを含む方の立体(7)の体積を求める。

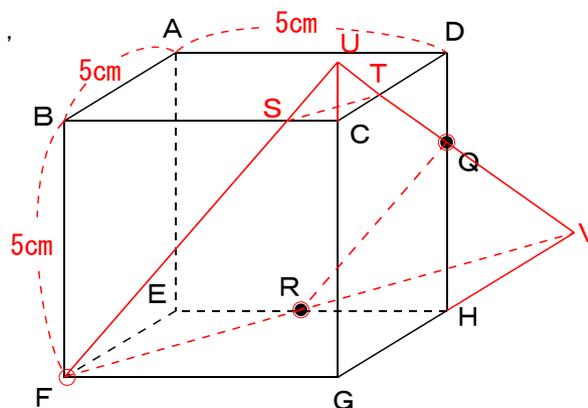
右図において、STとFRは平行で、 $FE : ER = 2 : 1$ より、 $CT : CS = 2 : 1$ なので、

$$CT = \frac{5}{4} \times 2 = \frac{5}{2} \text{ cm.}$$

また、三角すいU-SCTと三角すいU-FGVは相似で、

$$\text{相似比は } SC : FG = \frac{5}{4} : 5 = 1 : 4$$

なので、 $UC : UG : CG = 1 : 4 : (4 - 1) = 1 : 4 : 3$ なので、



$$UC = 5 \times \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \text{ cm}, \quad UG = \frac{5}{3} \times 4 = \frac{20}{3} \text{ cm}.$$

$$\text{また, } GV = \frac{5}{2} \times 4 = 10 \text{ cm}, \quad HV = 10 - 5 = 5 \text{ cm}, \quad RH = \frac{5}{2} \text{ cm},$$

$$OH = 5 \times \frac{2}{3} = \frac{10}{3} \text{ cm} \quad \text{なので,}$$

(7)の体積は

$$\begin{aligned} & 5 \times 10 \times \frac{1}{2} \times \frac{20}{3} \times \frac{1}{3} - \frac{5}{4} \times \frac{5}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{5}{3} \times \frac{1}{3} - \frac{5}{2} \times 5 \times \frac{1}{2} \times \frac{10}{3} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{500}{9} - \frac{125}{144} - \frac{125}{18} = \frac{8000 - 125 - 1000}{144} = \frac{6875}{144} \text{ cm}^3. \end{aligned}$$

このうち、立体Kとの共通部分…(イ)の体積はこの体積から右図の三角すいF-SCTの体積を除いたもの。

右図において、STとFRは平行で、

FE : ER = 2 : 1 より、

CT : CS = 2 : 1 なので、

$$CT = \frac{5}{4} \times 2 = \frac{5}{2} \text{ cm}.$$

よって、三角すいF-SCTの体積は

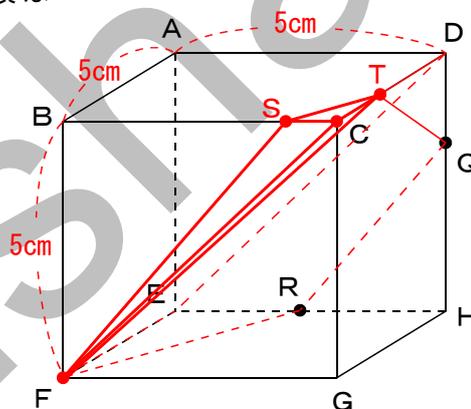
$$\frac{5}{4} \times \frac{5}{2} \times \frac{1}{2} \times 5 \times \frac{1}{3} = \frac{125}{48} \text{ cm}^3 \quad \text{なので,}$$

(イ)の体積は

$$\frac{6875}{144} - \frac{125}{48} = \frac{6875}{144} - \frac{375}{144} = \frac{6500}{144} = \frac{1625}{36} = 45 \frac{5}{36} \text{ cm}^3.$$

立体Lは立体Kから(イ)を除いたものなので、体積は

$$62.5 - 45 \frac{5}{36} = 62 \frac{18}{36} - 45 \frac{5}{36} = 17 \frac{13}{36} \text{ cm}^3 \quad \text{です。}$$



4 (1) ア 19343, イ 14297, ウ 13, エ 5046, オ 841

5 (1) 62.5 (2) オ (3)  $17 \frac{13}{36} \text{ cm}^3$