

2023年度 麻布中学校(問題)

- ⑥ $\frac{1}{16}$, $\frac{3}{32}$, $\frac{9}{64}$ のように, 2 を 4 個以上かけ合わせてできる数を分母として, ^{きすう}奇数を分子とするような真分数を考えます。このような分数 A を小数で表したとき, 小数点以下に現れる数字のうち, 右端の 4 個をそのままの順で並べてできる整数を $\langle A \rangle$ で表します。

例えば

$$\frac{1}{16} = 0.0625 \quad \text{なので} \quad \left\langle \frac{1}{16} \right\rangle = 625,$$

$$\frac{1}{32} = 0.03125 \quad \text{なので} \quad \left\langle \frac{1}{32} \right\rangle = 3125 \quad \text{です。}$$

次の表は, さまざまな $\langle A \rangle$ の ^{あた}値を, 分数 A の分母と分子についてまとめたものです。

分母 分子	16	32	64	128	256	...
1	625	3125	5625			
3	1875	9375				
5	3125	5625				
7	4375	1875				
9	5625	8125				
11	6875	4375				
13	ア	ウ				
15	イ	エ				
17		オ				
19		カ				
⋮		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

以下の問いに答えなさい。ただし, 上の表は答えを求めるために自由に用いてかまいません。

- (1) 表の中にある空らんア，イ，ウ，エ，オ，カに当てはまる整数をし下の答のらんに書きなさい。
- (2) $\left\langle \frac{\boxed{\text{あ}}}{64} \right\rangle = 4375$ となりました。 $\boxed{\text{あ}}$ に当てはまる，1以上64未満の奇数をすべて答えなさい。ただし，答のらんはすべて使うとは限りません。
- (3) $\left\langle \frac{9}{\boxed{\text{い}}} \right\rangle = 625$ となりました。 $\boxed{\text{い}}$ に当てはまる，2を4個以上かけ合わせてできる数を，もっとも小さいものから順に2つ答えなさい。
- (4) $\frac{\boxed{\text{う}}}{2048}$ を小数で表したとき，小数第一位の数字が1になりました。さらに，
 $\left\langle \frac{\boxed{\text{う}}}{2048} \right\rangle = 9375$ となりました。 $\boxed{\text{う}}$ に当てはまるもっとも小さい奇数を答えなさい。

2023年度 麻布中学校(解説)

6

$$(1) \quad \frac{13}{16} = \frac{11}{16} + \frac{2}{16} = \frac{11}{16} + \frac{1}{8} \text{ で, } \frac{1}{8} = 0.1250 \text{ より,}$$

$$\text{ア} = 6875 + 1250 = \underline{8125}, \quad \text{イ} = 8125 + 1250 = \underline{9375},$$

$$\frac{13}{32} = \frac{11}{32} + \frac{2}{32} = \frac{11}{32} + \frac{1}{16} \text{ で, } \frac{1}{16} = 0.0625 \text{ より,}$$

$$\text{ウ} = 4375 + 6250 = 10625 \rightarrow 0625 \rightarrow \underline{625},$$

$$\text{エ} = 625 + 6250 = \underline{6875},$$

$$\text{オ} = 6875 + 6250 = 13125 \rightarrow \underline{3125},$$

$$\text{カ} = 3125 + 6250 = \underline{9375} \text{ です。}$$

$$(2) \quad \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64} \text{ は順に小数第 4 位, 第 5 位, 第 6 位までの数。}$$

$$\text{また, } \left\langle \frac{1}{32} \right\rangle = 3125 \cdots (7), \quad \left\langle \frac{1}{64} \right\rangle = 5625 \text{ で,}$$

$$\frac{1}{64}, \frac{3}{64}, \frac{5}{64}, \dots \text{ は } \frac{2}{64} = \frac{1}{32} \text{ ずつ増えるので,}$$

$$\left\langle \frac{1}{64} \right\rangle, \left\langle \frac{3}{64} \right\rangle, \left\langle \frac{5}{64} \right\rangle, \dots (1) \text{ は } (7) \text{ の下 3 桁を 10 倍した 1250 ずつ増える。}$$

1250 × 8 = 10000 より, これらの値は最初から 8 個を繰り返す。

また, 5625 + 1250 × 7 = 5625 + 8750 = 14375 より, 下 4 桁が 4375 となるので, 下 4 桁が 4375 となるのは (1) の 7 + 1 = 8 番目, 8 + 8 = 16 番目, 16 + 8 = 24 番目, …となる。

$$\text{よって, } \left\langle \frac{\boxed{\text{あ}}}{64} \right\rangle = 4375 \text{ の分子の } \boxed{\text{あ}} \text{ は奇数の 8 番目, 16 番目, 24 番目, 32 番}$$

$$\text{目} \cdots \text{となる。よって, } \boxed{\text{あ}} = 2 \times 8 - 1 = 15, 2 \times 16 - 1 = 31, 24 \times 2 - 1 = 47, 32 \times 2 - 1 = 63, \dots \text{となるので, 64 以下の奇数は,}$$

$$\underline{15, 31, 47, 63} \text{ です。}$$

$$(3) \quad \left\langle \frac{9}{16} \right\rangle = 5625, \quad \left\langle \frac{9}{32} \right\rangle = 8125, \quad 1250 \div 2 = 625 \text{ より, } \left\langle \frac{9}{64} \right\rangle = \underline{625}。$$

$$6250 \div 2 = 3125 \text{ より, } \left\langle \frac{9}{128} \right\rangle = 3125。$$

$$31250 \div 2 = 15625 \text{ より, } \left\langle \frac{9}{256} \right\rangle = 5625。$$

$$56250 \div 2 = 28125 \text{ より, } \left\langle \frac{9}{512} \right\rangle = 8125。$$

$$1250 \div 2 = 625 \text{ より, } \left\langle \frac{9}{1024} \right\rangle = \underline{625} \text{ となるので,}$$

$$\left\langle \frac{9}{\boxed{\text{い}}} \right\rangle = 625 \quad \text{となるいは小さい方から } \underline{64}, \underline{1024} \quad \text{です。}$$

$$(4) \quad \left\langle \frac{1}{64} \right\rangle = 5625, \quad 56250 \div 2 = 28125 \text{ より, } \left\langle \frac{1}{128} \right\rangle = 8125。$$

$$81250 \div 2 = 40625 \text{ より, } \left\langle \frac{1}{256} \right\rangle = 625。6250 \div 2 = 3125 \text{ より, } \left\langle \frac{1}{512} \right\rangle = 3125。$$

$$31250 \div 2 = 15625 \text{ より, } \left\langle \frac{1}{1024} \right\rangle = 5625 \cdots (\text{ウ})。$$

$$56250 \div 2 = 28125 \text{ より, } \left\langle \frac{1}{2048} \right\rangle = 8125。$$

また, $\left\langle \frac{1}{2048} \right\rangle, \left\langle \frac{3}{2048} \right\rangle, \left\langle \frac{5}{2048} \right\rangle, \dots (\text{エ})$ は (ウ) の下 3 桁を 10 倍した 6250 ずつ増えるので, $6250 \times 8 = 50000$ より, 8 個の数字を繰り返す。

8 個の数字は順に 8125,

$$8125 + 6250 = 14375 \rightarrow 4375,$$

$$4375 + 6250 = 10625 \rightarrow 625,$$

$$625 + 6250 = 6875,$$

$$6875 + 6250 = 13125 \rightarrow 3125,$$

$$3125 + 6250 = 9375,$$

$$9375 + 6250 = 15625 \rightarrow 5625$$

$$5625 + 6250 = 11875 \rightarrow 1875 \quad \text{となり, } 9375 \text{ はこの 8 個のうち最初から 6 番目。}$$

よって, $\left\langle \frac{\boxed{\text{う}}}{2048} \right\rangle = 9375$ にあてはまる $\boxed{5}$ は, $(6 + 8 \text{ の倍数})$ 番目の奇数。

また, $\frac{\boxed{\text{う}}}{2048}$ を小数で表したとき, 小数第一位が 1 なので,

$$\boxed{5} \text{ は } 2048 \times 0.1 = 204.8, \quad 2048 \times 0.2 = 409.6 \text{ より,}$$

205 以上 409 以下。205 は $(205 + 1) \div 2 = 103$ 番目の奇数なので,

$$6 + 8 \times 12 = 102, \quad 6 + 8 \times 13 = 110 \quad \text{より,}$$

$$\boxed{5} \text{ にあてはまるのは, } 110 \text{ 番目の奇数。}$$

$$\text{つまり } 2 \times 110 - 1 = \underline{219} \quad \text{です。}$$