

2022年度 渋谷教育学園幕張中学校(問1題)

5

立方体 $ABCD-EFGH$ において、

正方形 $ABCD$ の対角線 AC を三等分する点を A に近い方から点 P 、 Q

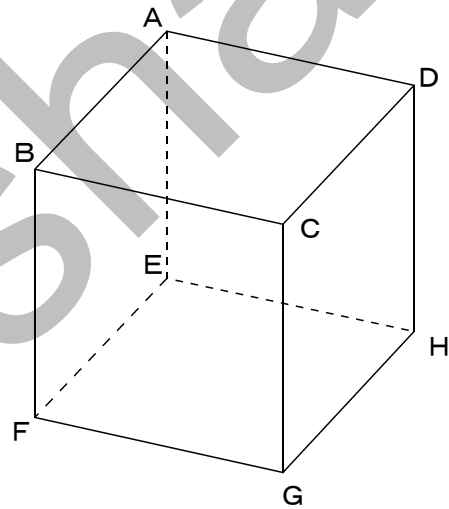
正方形 $FECB$ の対角線 FC を三等分する点を F に近い方から点 R 、 S

正方形 $HDCG$ の対角線 HC を三等分する点を H に近い方から点 T 、 U
とします。次の各問いに答えなさい。

ただし、角すいの体積は、(底面積) $\times$ (高さ) $\div 3$ で求められるものとします。

- (1) 立方体を 3 点 P 、 R 、 T を平面で切断したときにできる切り口を (ア)、3 点 Q 、 S 、 U を通る平面で切断したときにできる切り口の図形を (イ) とします。(ア) の面積と (イ) の面積の比を、最も簡単な整数の比で答えなさい。

- (2) 立方体を 3 点 P 、 R 、 T を通る平面と、3 点 Q 、 R 、 T を通る平面で同時に切断したときにできる立体のうち、点 B を含む立体と点 E を含む立体の体積比を、最も簡単な整数の比で答えなさい。



2022年度 渋谷教育学園幕張中学校(解説)

5

- (1) 右図で、 $\triangle PRT$ は $\triangle AFH$ と平行なので、
 3点P, R, Tを通る平面で立方体を切った
 とき、Pを通る交線はFHと平行。
 同様に、Rを通る交線はAHと
 平行、Tを通る交線はAFに平行
 になるので、立方体を3点P, R, T
 を通る平面で切ったときの切り口は
 右図の赤の実線のような六角形に
 なる。…(あ)

また、 $\triangle QSU$ も $\triangle AFH$ と平行なので、
 3点Q, S, Uを通る平面で立方体を切った
 とき、切り口は、右下図の $\triangle VWX$ …(*)
 のようになる。

ここで、右図と右下図で、 $\triangle JKL$ と $\triangle VWX$ は
 相似で、相似比は $CP : CQ = 2 : 1$ …(7)。

また、右図で、 $\triangle JCL$ と $\triangle AMI$ は相似で
 相似比は $CP : AP = 1 : 2$ なので、
 $JL : MI = 2 : 1$ 。

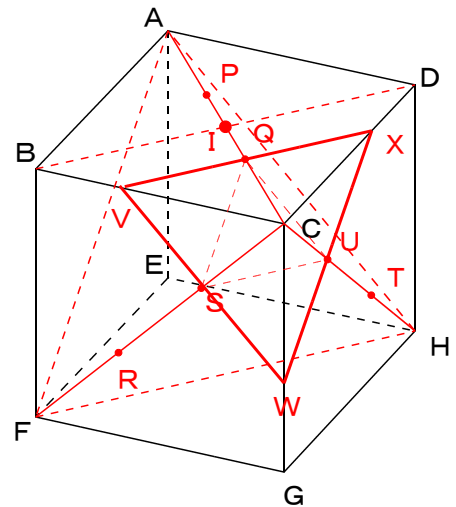
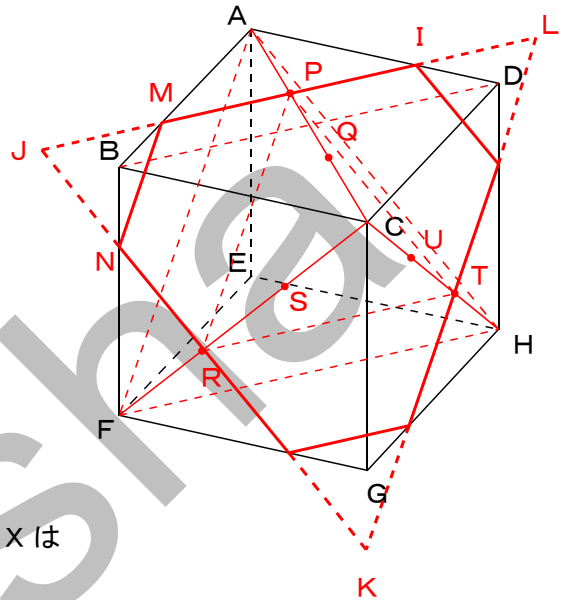
よって、 $JM : JL = (2 - 1) \div 2 : 2$
 $= 0.5 : 2$ …(**) となる。

(7), (i)から、3つの相似な三角形
 $\triangle JKL$, $\triangle VWX$, $\triangle JNM$ において、
 これらはすべて $\triangle AFH$ と相似なので
 正三角形で、相似比は

$$2 : 0.5 : 1 = 4 : 1 : 2。$$

よって、面積比は $4 \times 4 : 1 \times 1 : 2 \times 2$
 $= 16 : 1 : 4$ となる。

よって、図から、(*)と(**)の面積比は
 $(16 - 1 \times 3) : 4 = \underline{13 : 4}$ になります。



- (2) 3点P, R, Tを通る平面による立方体の切り口は右図のようになる。

また, 3点Q, R, Tによる立方体の切り口はRTが立方体の上の面と平行なので, 右図の長方形あいおか のようになる。

右図で, 相似な4つの三角すいC-あきか, C-BGD, C-JKL, B-JNMについて, 最初の3つについて, Cからあか, BD, JLまでの距離の比から, 相似比は

$$\frac{1}{3} : \frac{1}{2} : \frac{2}{3} = 2 : 3 : 4 \quad \text{なので,}$$

$$\text{体積比は } 2 \times 2 \times 2 : 3 \times 3 \times 3 : 4 \times 4 \times 4 = 8 : 27 : 64 \cdots (\text{ウ}).$$

よって, それぞれの体積を比の8, 27, 64とすると, C-JKLとB-JNMの相似比はJK : JM = 2 : 0.5 = 4 : 1なので, 体積比は $4 \times 4 \times 4 : 1 \times 1 \times 1 = 64 : 1$ ので, (ウ)から,

三角すいB-JNMの体積は比の $64 \times \frac{1}{64} = 1$ となる。

また, 三角すいC-BDGの体積は立方体の体積の $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ なので,

立方体の体積は $27 \times 6 = 162$ 。

また, 右図で三角柱あCか-RきT の体積は

$$(\text{三角すいC-あきかの体積}) \times 3 = 8 \times 3 = 24,$$

$$\text{三角柱RきT-いGお の体積は } 24 \times \frac{1}{2} = 12.$$

さらに, (三角すいK-RきTの体積) = (三角すいC-あきかの体積) = 8,

(三角すいK-うGえの体積) = (B-JNMの体積) = 1 となるので,

立体RきT-うGえの体積 = $8 - 1 = 7$ 。

よって, 2平面で切断後, 点Bを含む立体の体積は

$$(64 - 1 \times 3) - (24 + 7) = 61 - 31 = 30.$$

また, 点Eを含む立体の体積は, 立方体の体積から

$$\{(64 - 1 \times 3) - 7\} + 12 = 54 + 12 = 66 \quad \text{を引いた体積なので}$$

$$162 - 66 = 96.$$

したがって, 点Bを含む立体と点Eを含む立体の体積の比は

$$30 : 96 = \underline{5 : 16} \quad \text{です。}$$

