

2022年度 江戸川学園取手中学校(問題)

6 [50 分試験(5 科目型, 英語型)の受験生のみ解答すること。]

0 . **2** . **2** . **4** . **4** . **6** . **6** . **6** と数字の書かれた 8 枚のカードがあります。

一郎君と次郎君はこの 8 枚のカードを横一列に並べていろいろな整数をつくろうと話し合っています。そのときの会話にの様子を読み, 【ア】から【ウ】に入る数を答えなさい。【ア】については答えだけでなく, 途中の計算や考え方も描きなさい。

一郎君 : 全部で 8 枚のカードがあるので, まずは 8 枚全部を横一列に並べて, 8 けたの整数をつくろうよ。

次郎君 : 8 けたの整数は全部で【ア】通りあるね。次はこの中から 3 枚のカードを取り出してから横一列に並べて, 3 けたの整数をつくろうよ。

一郎君 : やってみると 3 けたの整数は【イ】通りできたよ。

次郎君 : 最後に, この 8 枚の中から 4 枚のカードを取り出して横一列に並べて 4 けたの整数をつくるとき, 4 の倍数となる 4 けたの整数は何通りできるかかんがえてみよう。

一郎君 : うーん, 4 の倍数となる整数はたくさんありそうだね。

次郎君 : 難しいけど, なんとか解くことができたよ。答えは【ウ】通りだね。

2022年度 江戸川学園取手中学校(解説)

6

ア・・・0, 2, 2, 4, 4, 6, 6, 6 の 8 個を並べて 8 桁の整数を作るとき、
0 が最高位にきてもいいとすると、8 枚の並べかえになる。

8 個がすべて異なるとすると、 $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ 通り
作れるが、実際には 2 が 2 個、4 が 2 個、6 が 6 個あるので、これは
これらをそれぞれ区別しない場合の $(2 \times 1) \times (2 \times 1) \times (3 \times 2 \times 1)$ 倍にな
る。よって、実際の 8 個の数の並べかえは

$$\frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(2 \times 1) \times (2 \times 1) \times (3 \times 2 \times 1)} = 1680 \text{ 通り。}$$

このうち、0 が最高位にきて 8 桁の整数・・・にあてはまらないものは
0 の後ろの 7 個の数の並べかえから

$$\frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(2 \times 1) \times (2 \times 1) \times (3 \times 2 \times 1)} = 210 \text{ 通り。}$$

よって、8 桁の整数は $1680 - 210 = 1470$ 通り・・・ア。

(注) 最高位が 2 か 4 か 6 で分けると、

$$\begin{aligned} & \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(2 \times 1) \times (3 \times 2 \times 1)} \times 2 + \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(2 \times 1) \times (2 \times 1) \times (2 \times 1)} \\ &= 840 + 630 = 1470 \text{ 通り・・・ア。} \end{aligned}$$

イ・・・ 3 個の数の組を作って並べかえると考えると

同じ数が 3 個の組は (6, 6, 6) で、並べかえても 1 通り。

同じ数が 2 個の組は (2, 2, 0), (2, 2, 4), (2, 2, 6),
(4, 4, 0), (4, 4, 2), (4, 4, 6),
(6, 6, 0), (6, 6, 2), (6, 6, 4),

で、並べかえると 0 を含む組からは 2 通りずつ、
0 を含まない組からは 3 通りずつ作れるので
 $2 \times 3 + 3 \times 6 = 6 + 18 = 24$ 通り。

3 個とも異なる組は (0, 2, 4), (0, 2, 6), (0, 4, 6),
(2, 4, 6) で、並べかえると

0 を含む組からは $2 \times 2 \times 1 = 4$ 通りずつ、
0 を含まない組からは $3 \times 2 \times 1 = 6$ 通り作れるので
 $4 \times 3 + 6 = 18$ 通り。

以上の結果から、3 桁の整数は全部で $1 + 24 + 18 = 43$ 通り・・・イ。

ウ・・・0, 2, 2, 4, 4, 6, 6, 6 から 4 枚で 4 の倍数を作る。

下 2 桁が 4 で割り切れる数なので、

□□ 04・・・上 2 桁は (2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 6), (6, 6) を並べかえて
 $1 \times 2 + 2 \times 3 = 8$ 通り。

□□ 20・・・上 2 桁は (2, 4), (2, 6), (4, 4), (4, 6), (6, 6) を並べかえて
 $2 \times 3 + 1 \times 2 = 8$ 通り。

□□ 24・・・上 2 桁は (0, 2), (0, 4), (0, 6), (2, 4), (2, 6), (4, 6), (6, 6)
を並べかえて $1 \times 4 + 2 \times 3 = 10$ 通り。

□□ 40・・・上から 2 桁は (2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 6), (6, 6)
を並べかえて $2 \times 3 + 1 \times 2 = 8$ 通り。

□□ 44・・・上から 2 桁は (0, 2), (0, 6), (2, 2), (2, 6), (6, 6)
を並べかえて $1 \times 4 + 2 = 6$ 通り。

□□ 60・・・上から 2 桁は (2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 4), (4, 6), (6, 6)
を並べかえて $1 \times 3 + 2 \times 3 = 9$ 通り。

□□ 64・・・上から 2 桁は (0, 2), (0, 4), (0, 6), (2, 2), (2, 4), (2, 6),
(4, 6), (6, 6) を並べかえて $1 \times 5 + 2 \times 3 = 11$ 通り。

以上の結果から, 4 桁の 4 の倍数は全部で

$$8 + 8 + 10 + 8 + 6 + 9 + 11 = 60 \text{ 通り} \cdots \text{ウ。}$$