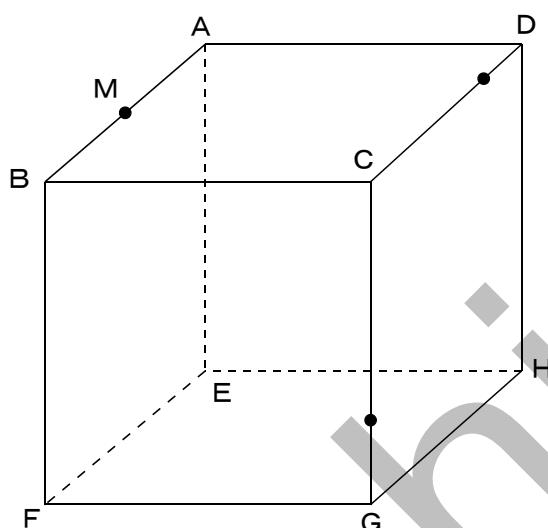


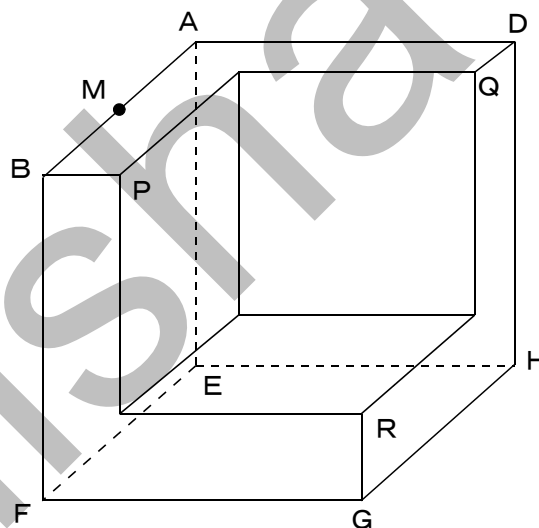
2022年度 豊島岡女子学園中学校(問題)

6

＜図1＞のように、1辺の長さが8cmの立方体 $ABCD-EFGH$ があり、点 M は辺 AB の真ん中の点、点 P は辺 BC 上で $BP:PC=1:3$ となる点、点 Q は辺 DC 上で $DQ:QC=1:3$ となる点、点 R は辺 GC 上で $GR:RC=1:3$ となる点です。＜図2＞は、立方体 $ABCD-EFGH$ から、辺 PC 、辺 QC 、辺 RC を3辺とする立方体を切り取った図形です。このとき、次の各問いに答えなさい。



＜図1＞



＜図2＞

- (1) ＜図2＞の立体を3点 A 、 F 、 G を通る面で切断したとき、点 E を含む立体の体積は何 cm^3 ですか。
- (2) ＜図2＞の立体を3点 M 、 F 、 H を通る面で切断したとき、点 E を含む立体の体積は何 cm^3 ですか。
- (3) ＜図2＞の立体を3点 M 、 D 、 F を通る平面で切断したとき、点 E を含む立体の体積は何 cm^3 ですか。

2022年度 豊島岡女子学園中学校(解説)

6

- (1) 切断後、点Eを含む立体は
右図の赤の太線のような立体になる。
右図で、 $BP = DQ = GR$

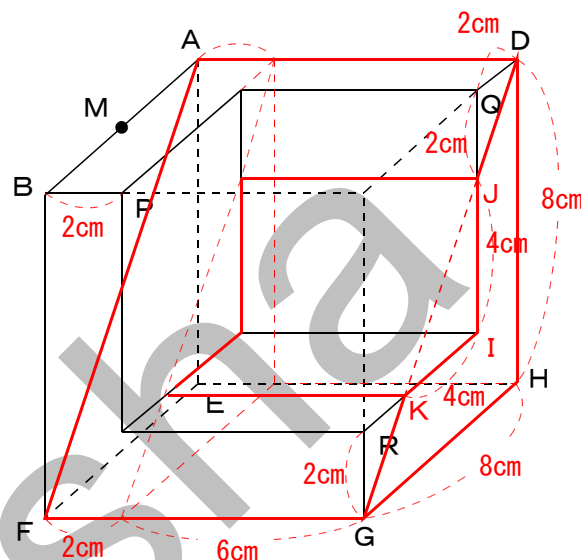
$$= 8 \times \frac{1}{1+3} = 8 \times \frac{1}{4} = 2\text{cm}.$$

また、 $\triangle DQJ$ 、 $\triangle JIK$ 、 $\triangle KLG$ は
 $\triangle DGH$ と相似な直角二等辺三角形
になるので、

$$JI = IK = 8 - (2 + 2) = 4\text{cm} \text{ となる}$$

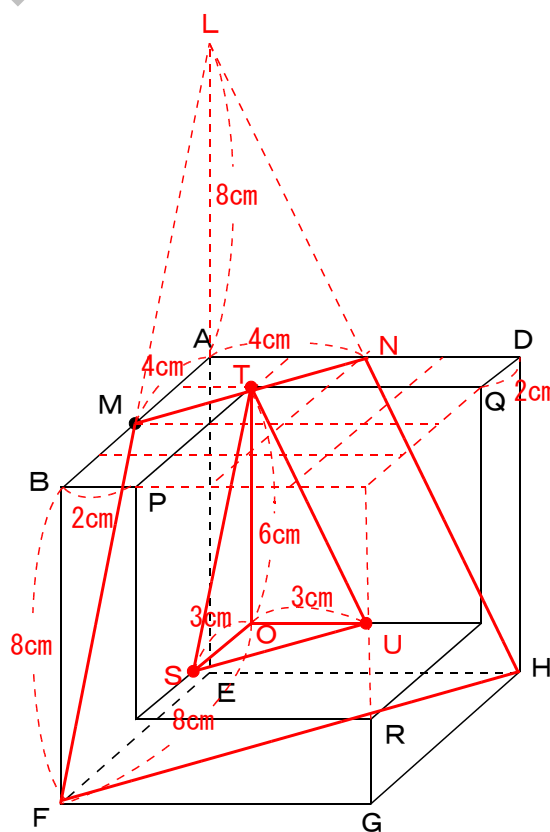
ので、求める立体の体積は
もとの立方体の体積の半分から、
底面積が $4 \times 4 \div 2 = 8\text{cm}^2$ で、
高さが $8 - 2 = 6\text{cm}$ の三角柱の
体積を除いたものなので

$$\begin{aligned} 8 \times 8 \times 8 \times \frac{1}{2} - 8 \times 6 \\ = 256 - 48 = \underline{208\text{cm}^3} \text{ です。} \end{aligned}$$



- (2) 切断後、点Eを含む立体は、右図の
赤の太線のような立体になる。
つまり、右図で、三角すい台
 $AMN-EFH$ から、三角すい
 $T-OSU$ を除いた立体になる。
右図で、三角すい $L-AMN$ と
三角すい $L-EFH$ 、三角すい
 $T-OSU$ は相似で、相似比は
高さに着目して $8 : (8 + 8) : 6$
 $= 8 : 16 : 6 = 4 : 8 : 3$ なので、
各部の長さは右図のようになる。
よって、求める体積は

$$\begin{aligned} (8 \times 8 \div 2 \times 16 \times \frac{1}{3} \\ - 4 \times 4 \div 2 \times 8 \times \frac{1}{3}) \\ - 3 \times 3 \div 2 \times 6 \times \frac{1}{3} \\ = (\frac{512}{3} - \frac{64}{3}) - 9 \\ = \frac{448}{3} - \frac{27}{3} = \frac{421}{3} = 140\frac{1}{3}\text{cm}^3 \text{ です。} \end{aligned}$$



(3) 切断後、点Eを含む立体は、右下図の

赤の太線のような立体になる。

上の面の各部の長さは、右図から

$$\text{イエ} = 2 \times \frac{1}{2} = 1\text{cm}, \quad \text{ウエ} = 2\text{cm}.$$

また、 $\triangle \text{アイエ}$ は $\triangle \text{LFE}$ と相似なので、

$$\text{アエ} = \text{イエ} \times 2 = 1 \times 2 = 2\text{cm}.$$

同様に、 $\text{クケ} = 1\text{cm}$, $\text{クカ} = 2\text{cm}$,

$\text{キケ} = 2\text{cm}$ となる。

また、 $\text{アオ} = 2 + 6 = 8\text{cm}$ 。

また、3つの三角すい $\text{ア} - \text{O} - \text{オカ} \cdots (\text{あ})$,

$\text{アイエウ} \cdots (\text{い})$, $\text{キークケカ} \cdots (\text{う})$ は

相似で、相似比は高さに着目すると

$8 : 2 : 2 = 4 : 1 : 1$ となるので

体積比は

$$4 \times 4 \times 4 : 1 \times 1 \times 1 : 1 \times 1 \times 1 \\ = 64 : 1 : 1.$$

求める体積は、立方体を3点 DMF で切断

してできる立方体の半分の体積から

$(\text{あ}) - (\text{い}) - (\text{う})$ の体積を除いたもの。

(い) の体積は

$$1 \times 2 \times \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \text{cm}^3 \quad \text{なので、}$$

$$(\text{あ}) - (\text{い}) - (\text{う}) \text{の体積は } \frac{2}{3} \times (64 - 1 - 1) = \frac{2}{3} \times 62 = \frac{124}{3} \text{cm}^3 \quad \text{。}$$

よって、求める体積は

$$8 \times 8 \times 8 \times \frac{1}{2} - \frac{124}{3} = 256 - 41\frac{1}{3} = 214\frac{2}{3} \text{cm}^3 \quad \text{です。}$$

