

2022年度 桐朋中学校(問題)

- 7 5つの数 6, 7, 8, 9, 10 をすべて使い, それらを $\boxed{\text{あ}}$, $\boxed{\text{い}}$, $\boxed{\text{う}}$, $\boxed{\text{え}}$, $\boxed{\text{お}}$ に 1 つずつあてはめて, 足し算の式をつくります。

$$\boxed{\text{あ}} + \frac{\boxed{\text{い}}}{2} + \frac{\boxed{\text{う}}}{3} + \frac{\boxed{\text{え}}}{4} + \frac{\boxed{\text{お}}}{5}$$

この式を計算した値を P とします。

例えば $\boxed{\text{あ}}$ が 7, $\boxed{\text{い}}$ が 8, $\boxed{\text{う}}$ が 10, $\boxed{\text{え}}$ が 6, $\boxed{\text{お}}$ が 9 のとき,

足し算の式は $7 + \frac{8}{2} + \frac{10}{3} + \frac{6}{4} + \frac{9}{5}$ となり, これを計算して $P = \frac{529}{30}$ となります。

- (1) 考えられる P のうち, 最も小さい数はいくつですか。
- (2) $P = 18$ のとき, $\boxed{\text{あ}}$, $\boxed{\text{い}}$, $\boxed{\text{う}}$, $\boxed{\text{え}}$, $\boxed{\text{お}}$ にあてはまる数を求めなさい。
 たとえば, $\boxed{\text{あ}}$ が 7, $\boxed{\text{い}}$ が 8, $\boxed{\text{う}}$ が 10, $\boxed{\text{え}}$ が 6, $\boxed{\text{お}}$ が 9 のとき,
 (7, 8, 10, 6, 9) のように書きなさい。
- (3) $P = \frac{1031}{60}$ のとき, $\boxed{\text{あ}}$, $\boxed{\text{い}}$, $\boxed{\text{う}}$, $\boxed{\text{え}}$, $\boxed{\text{お}}$ にあてはまる数を求めなさい。考えられるものをすべて (2) と同じように書きなさい。

2022年度 桐朋中学校(解説)

7

- (1) P が最小になるのは、分母が大きい分数の分子を大きくしたときなので、
 $6 + \frac{7}{2} + \frac{8}{3} + \frac{9}{4} + \frac{10}{5} = \frac{360 + 210 + 160 + 135 + 120}{60} = \frac{985}{60} = \frac{197}{12}$ です。

- (2) $P = \text{あ} + \frac{\text{い}}{2} + \frac{\text{う}}{3} + \frac{\text{え}}{4} + \frac{\text{お}}{5} = \frac{\text{あ} \times 60 + \text{い} \times 30 + \text{え} \times 15 + \text{お} \times 12}{60}$ なので、

$$P = 18 \text{ のとき, } \frac{\text{あ} \times 60 + \text{い} \times 30 + \text{う} \times 20 + \text{え} \times 15 + \text{お} \times 12}{60} = 18 = \frac{1080}{60} \text{ より,}$$

$$\text{あ} \times 60 + \text{い} \times 30 + \text{う} \times 20 + \text{え} \times 15 + \text{お} \times 12 = 1080 \cdots (7) \text{ で,}$$

「あ、い、う、え、お」は 6, 7, 8, 9, 10 のいずれかの数 $\cdots$ となる。

「あ $\times$ 60, い $\times$ 30, え $\times$ 15, お $\times$ 12, 1080」は 3 の倍数なので、

「う $\times$ 20」も 3 の倍数なので、「う」は 3 の倍数。よって、「う」は 6 か 9。

また、「あ $\times$ 60, い $\times$ 30, う $\times$ 20, お $\times$ 12, 1080」は偶数なので、

「え $\times$ 15」も偶数。つまり、「え」は 6 か 8 か 10。

このとき、「あ $\times$ 60, い $\times$ 30, え $\times$ 15, 1080」は 10 の倍数になるので、

「お $\times$ 12」も 10 の倍数。よって、「お」= 10 となる。

よって、「お=10, う=6 か 9, え=6 か 8」となるので $\cdots$

「お=10, う=6, え=8」のとき $\cdots$ (7)より、

$$\text{あ} \times 60 + \text{い} \times 30 + 6 \times 20 + 8 \times 15 + 10 \times 12 = 1080 \text{ なので,}$$

$$\text{あ} \times 60 + \text{い} \times 30 = 1080 - (120 + 120 + 120) = 720.$$

$$\text{この式を 30 で割ると} \cdots \text{あ} \times 2 + \text{い} \times 1 = 24 \text{ で, 「あ, い」は 7 か 9}$$

となるので、この式は成り立たないので不適当。

「お=10, う=9, え=6」のとき $\cdots$ (7)より、

$$\text{あ} \times 60 + \text{い} \times 30 + 9 \times 20 + 6 \times 15 + 10 \times 12 = 1080 \text{ なので,}$$

$$\text{あ} \times 60 + \text{い} \times 30 = 1080 - (180 + 90 + 120) = 690.$$

$$\text{この式を 30 で割ると} \cdots \text{あ} \times 2 + \text{い} \times 1 = 23 \text{ で, 「あ, い」は 7 か 8}$$

となるので、「あ=8, い=7」。

「あ $\times$ 60 + い $\times$ 30」は偶数、705 は奇数なので成り立たない。

「お=10, う=9, え=8」のとき $\cdots$ (7)より、

$$\text{あ} \times 60 + \text{い} \times 30 + 9 \times 20 + 8 \times 15 + 10 \times 12 = 1080 \text{ なので,}$$

$$\text{あ} \times 60 + \text{い} \times 30 = 1080 - (180 + 120 + 120) = 660.$$

$$\text{この式を 30 で割ると} \cdots \text{あ} \times 2 + \text{い} \times 1 = 22 \text{ で「あ, い」は 6 か 7}$$

となるので、この式は成り立たない。

以上の結果から、(あ, い, う, え, お) = (8, 7, 9, 6, 10) です。

- (3) $P = \frac{1031}{60}$ のとき, $\frac{\text{あ} \times 60 + \text{い} \times 30 + \text{う} \times 20 + \text{え} \times 15 + \text{お} \times 12}{60} = \frac{1031}{60}$ より、

$$\text{あ} \times 60 + \text{い} \times 30 + \text{う} \times 20 + \text{え} \times 15 + \text{お} \times 12 = 1031 \cdots (4) \text{ で,}$$

「あ、い、う、え、お」は 6, 7, 8, 9, 10 のいずれかの数 $\cdots$ となる。

あ×60, い×30, お×12はすべて3の倍数で1031は $1031 \div 3 = 343$ 余り2より、「3の倍数+2」。よって、「う×20」も「3の倍数+2」なので、

うは7か8か10で、 $(7 \times 20) \div 3 = 140 \div 3 = 46$ 余り2、

$(8 \times 20) \div 3 = 160 \div 3 = 53$ 余り1、

$(10 \times 20) \div 3 = 200 \div 3 = 66$ 余り2より、「う」は7か10。

また、1031の一の位が1なので、

「(え, お)=(7, 8)か(9, 8)」

よって、「う=7か10で、(え, お)=(7, 8)か(9, 8)」となるので・

「う=7, (え, お)=(9, 8)」のとき・(イ)より、

あ×60+い×30+7×20+9×15+8×12=1031なので、

あ×60+い×30=1031-(140+135+96)=660。

この式を30で割ると・あ×2+い×1=22で、「あ, い」は6か10

となるので、「あ=6, い=10」。

「う=10, (え, お)=(7, 8)」のとき・(イ)より、

あ×60+い×30+10×20+7×15+8×12=1031なので、

あ×60+い×30=1031-(200+105++96)=630。

この式を30で割ると・あ×2+い×1=21で、「あ, い」は6か9

となるので、「あ=6, い=9」。

「う=10, (え, お)=(9, 8)」のとき・(イ)より、

あ×60+い×30+10×20+9×15+8×12=1031なので、

あ×60+い×30=1031-(200+135+96)=600。

この式を30で割ると・あ×2+い×1=20で、「あ, い」は6か7

となるので、「あ=7, い=6」。

以上の結果から、(あ, い, う, え, お)は

(6, 10, 7, 9, 8), (6, 9, 10, 7, 8), (7, 6, 10, 9, 8) です。