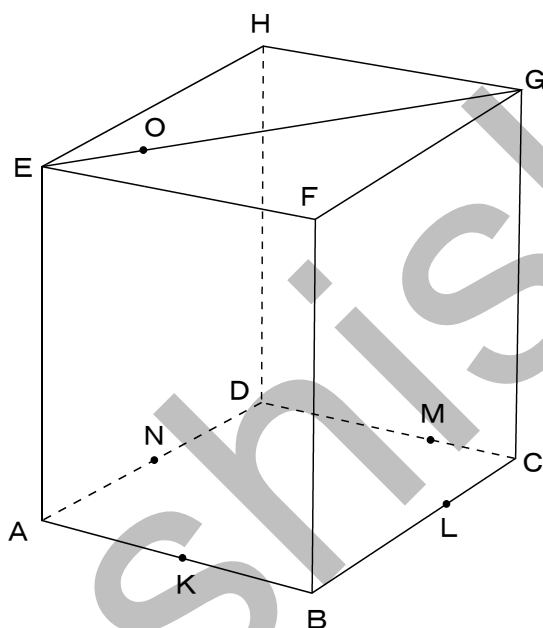


2021年度 渋谷教育学園幕張中学校(問1題)

- 5 図1のように、底面がひし形で、側面がすべて長方形である四角柱 $ABCD-EFGH$ があります。点 K, L, M, N はそれぞれ辺 AB, BC, CD, DA 上にあり、 $AK:KB=AN:ND=1:1$ で、 $BL:LC=DM:MC=2:1$ です。また、点 O はひし形 $EFGH$ の対角線 EG 上にあり、 $EO:OG=1:5$ です。四角形 $KL MN$ の各頂点を点 O をそれぞれ結び、四角すい $O-KLMN$ を作ります。

図1



このとき、次の各問いに答えなさい。

ただし、角すいの体積は、(底面積) $\times$ (高さ) $\div 3$ でもとめられるものとします。

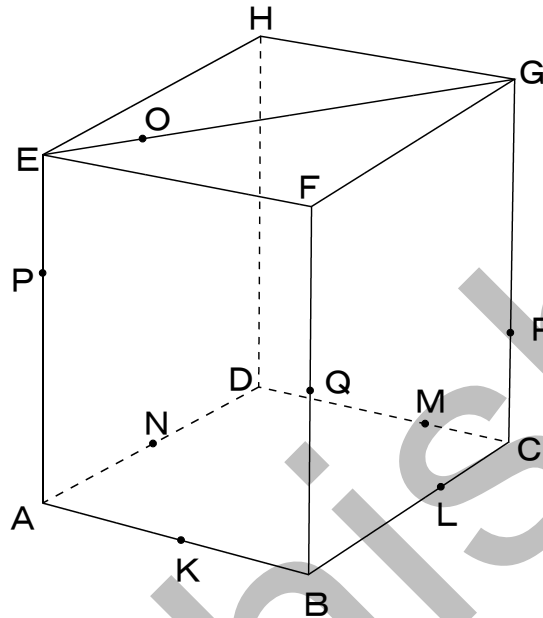
- (1) 四角すい $O-KLMN$ の体積は、四角柱 $ABCD-EFGH$ の体積の何倍ですか。
- (2) 辺 AE, BF, CG, DH のそれぞれの真ん中の点を通る平面で四角すい $O-KLMN$ を切るとき、切り口の面積はひし形 $ABCD$ の面積の何倍ですか。

- (3) 点 P , Q , R をそれぞれ辺 AE , BF , CG 上に $AP : PE = 2 : 1$,
 $BQ : QF = 1 : 1$, $CR : RG = 1 : 2$ となるようにとります。

図 2 は、図 1 に点 P , Q , R をかき加えたものです。

点 P , Q , R を通る平面で四角すい $O-KLMN$ を切って 2 つの立体に分けるとき、
 点 O を含む方の立体の体積は、四角すい $O-KLMN$ の体積の何倍ですか。

図 2



2021年度 渋谷教育学園幕張中学校(解説)

5

- (1) ひし形 $ABCD$ の面積を 1 とすると、
 $\triangle ABD$, $\triangle BCD$, $\triangle ABC$, $\triangle ACD$ の
 面積はそれぞれ $\frac{1}{2}$ となるので、

$$\triangle AKN \text{ の面積は } \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+1} \times \frac{1}{1+1} = \frac{1}{8},$$

$$\triangle BLK \text{ の面積は } \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+1} \times \frac{2}{2+1} = \frac{1}{6},$$

$$\triangle CML \text{ の面積は } \frac{1}{2} \times \frac{1}{2+1} \times \frac{1}{2+1} = \frac{1}{18},$$

$$\triangle DNM \text{ の面積は } \frac{1}{2} \times \frac{2}{1+2} \times \frac{1}{1+1} = \frac{1}{6} \text{ となる。}$$

よって、四角形 $KL MN$ の面積は

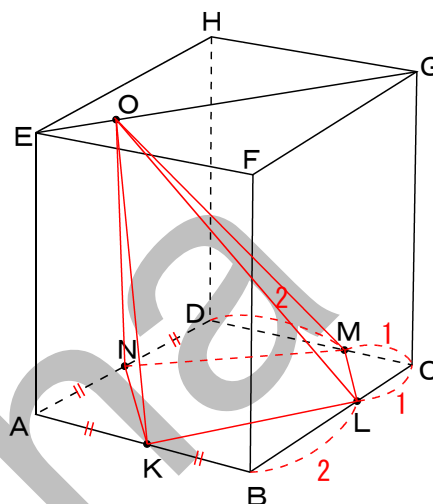
$$1 - 1 - \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18} + \frac{1}{6} \right) = 1 - \frac{9+12+4+12}{72} = 1 - \frac{37}{72} = \frac{35}{72}.$$

さらに、 EA の長さを 1 とすると、

$$\text{四角すい } O-KLMN \text{ の体積は } \frac{35}{72} \times 1 \times \frac{1}{3} = \frac{35}{216} \text{ となる。}$$

一方、四角柱 $ABCD-EFGH$ の体積は $1 \times 1 = 1$ となるので、

$$\text{四角すい } O-KLMN \text{ の体積はこの } \underline{\frac{35}{216} \text{ 倍}} \text{ です。}$$



- (2) 切断面は底面のひし形 $ABCD$ と
 平行になるので、切り口の形は四角形
 $KL MN$ と相似で、相似比は $1:2$ で、
 面積比は $1 \times 1 : 2 \times 2 = 1:4$ 。

よって、(1) と同様に考えると、

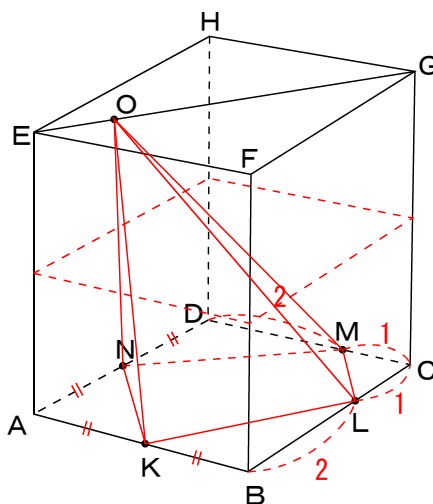
ひし形 $ABCD$ の面積は 1、

$$\text{四角形 } KLMN \text{ の面積は } \frac{35}{72},$$

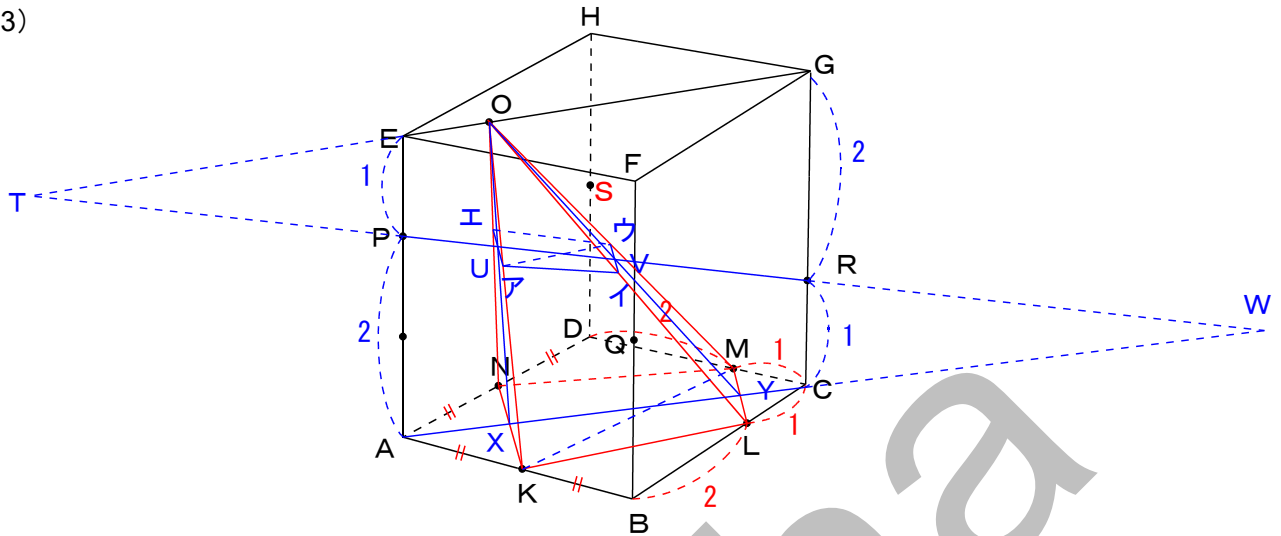
$$\text{切り口の面積は } \frac{35}{72} \times \frac{1}{4} = \frac{35}{288}.$$

よって、切り口の面積はひし形 $ABCD$ の

$$\text{面積の } \underline{\frac{35}{288} \text{ 倍}} \text{ です。}$$



(3)



HDの真ん中の点をSとすると、3点P, Q, Rを通る平面は、ひし形PQRSとなり、平面ACGEについて対称。また、四角すいO-KLMNも平面ACGEについて対称なので、切り口は上図の台形アイウエになる。
また、GEの延長、ACの延長と直線PRの交点をそれぞれ上図の様にT, Wとし、さらに直線PRと辺アエ、辺イウの交点をそれぞれU, Vまた、

直線ACとKN, LMの交点をそれぞれX, Yとすると・・

まず、 $\triangle PAW$ と $\triangle RCW$ は相似で相似比は2:1なので、

$AC: CW = (2-1): 1 = 1: 1$ 。よって、 $AC = 1$ とすると $CW = 1$ 。

また、 $AX = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ となるので、 $CX = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ 。

よって、 $XW = \frac{3}{4} + 1 = \frac{7}{4}$ 。・・(7)

また、 $\triangle PAW$ と $\triangle PET$ は相似で相似比は2:1。さらに $AW = 1 + 1 = 2$ なので、 $ET = 2 \times \frac{1}{2} = 1$ 。また、 $EG = AC = 1$ より、 $EO = 1 \times \frac{1}{1+5} = \frac{1}{6}$

より、 $OT = 1 + \frac{1}{6} = \frac{7}{6}$ 。・・(1)

また、 $\triangle UOT$ と $\triangle UXW$ は相似で相似比は(1), (7)より、

$\frac{7}{6} : \frac{7}{4} = 4 : 6 = 2 : 3$ 。したがって、 $OU : UX = 2 : 3$ となるので、

OA : AK = 2 : 3より、OA : OK = 2 : (2 + 3) = 2 : 5。・・(ウ)

同様に、OE : ON = 2 : 5。・・(エ)

次に、 $\triangle VOT$ と $\triangle VYW$ は相似で、相似比は

$OT : YW = \frac{7}{6} : \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2+1} + 1 \right) = \frac{7}{6} : \frac{7}{6} = 1 : 1$ となるので、

OI : IL = 1 : 1より、OI : OL = 1 : (1 + 1) = 1 : 2。・・(オ)

同様に、OU : UM = 1 : 2・・(カ) となる。

ここで、四角すいO-KLMNを三角すいO-KLMと三角すいO-KMNに分け、もとの四角すいO-KLMNの体積を1とするとと・・

MLとNKは平行で長さの比が $CL : AK = \frac{1}{3} : \frac{1}{2} = 2 : 3$ より、 $\triangle KLM$ と

$\triangle KMN$ の面積比が $2 : 3$ になるので、

それぞれの体積は、 $1 \times \frac{2}{2+3} = \frac{2}{5}$ 、 $1 \times \frac{3}{2+3} = \frac{3}{5}$ となる。

また、三角すいO－アイウと三角すいO－KLMの体積比は

$\triangle OAU$ の面積 $\times$ 高さ： $\triangle OKL$ の面積 $\times$ 高さなので、

(オ)、(カ)、(ウ)より、

$$\frac{2}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} : 1 \times 1 \times 1 = \frac{1}{10} : 1。$$

また、三角すいO－アウエと三角すいO－KMNの体積比は

(ウ)、(エ)、(カ)から、

$$\frac{2}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} : 1 \times 1 \times 1 = \frac{2}{25} : 1。$$

よって、三角すいO－アイウと三角すいO－アウエの体積の和、つまり、
四角すいO－KLMNを切断後の点Oを含む方の立体の体積は

$$\frac{2}{5} \times \frac{1}{10} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{25} = \frac{1}{25} + \frac{6}{125} = \frac{11}{125}。$$

したがって、切断後の点Oを含むほうの立体の体積は、

四角すいO－KLMNの体積の $\frac{11}{125}$ 倍 です。