

## 2021年度 市川中学校(問題)

4 2つの整数 $O$ 、 $\Delta$ に対して、 $O$ を $\Delta$ で割ったときの商を $[O, \Delta]$ と表します。

例えば、

$$[8, 2] = 4, [17, 5] = 3$$

となります。このとき、次の問いに答えなさい。

(1)  $[2021, \square] = 5$ となるとき、 $\square$ にあてはまる整数は何個あるか求めなさい。

(2)  $\frac{2021}{\square} - \frac{2021}{\square+1}$  が 1 より小さくなるとき、 $\square$ にあてはまる最小の整数を求めなさい。

(3)  $\star$ を 2021 以下の整数とします。 $[2021, \star] = \square$ となるとき、 $\square$ にあてはまる整数は何個あるか求めなさい。

## 2021年度 市川中学校(解説)

**4**

(1)  $[2021, \square] = 5$  のとき、

2021  $\div$   $\square$  の余りは 0 から  $\square - 1$  まで考えられる。

余りが  $\square$  のとき  $\cdots 2021 \div \square = 5$  より  $\square = 2021 \div 5 = 404.2$  で、 $\square$  は整数なので、 $\square$  は 404 以下。

また、余りが  $\square - 1$  のとき  $\cdots 2021 \div \square = 5$  余り  $\square - 1$  より、

$$2021 = 5 \times \square + \square - 1 = 5 \times \square + 1 \times \square - 1$$

$$= (5 + 1) \times \square - 1 = 6 \times \square - 1 \text{ となるので}$$

$$6 \times \square = 2021 + 1 = 2022, \text{ よって, } \square = 2022 \div 6 = 337 \text{ 以上。}$$

したがって、 $\square$  は 337 以上 404 以下となるので、 $\square$  にあてはまる整数は  $404 - 337 + 1 = \underline{68}$  個 あります。

$$(2) \quad \frac{2021}{\square} - \frac{2021}{\square+1} = 2021 \times \left( \frac{1}{\square} - \frac{1}{\square+1} \right) = 2021 \times \frac{\square+1-1}{\square \times (\square+1)} = 2021 \times \frac{1}{\square \times (\square+1)}$$

$$= \frac{2021}{\square \times (\square+1)} \text{ となるので, これが } 1 \text{ より小さいとき,}$$

$\square \times (\square + 1)$  は 2021 より大きい。

ここで、 $44 \times 45 = 1980$ 、 $45 \times 46 = 2070$  より、 $\square$  にあてはまる最小の整数は 45 です。

(3)  $[2021, \star] = \square$  より、 $2021 \div \star = \frac{2021}{\star}$  の整数部分が  $\square$ 。

$$\star = 1 \text{ のとき } \cdots \frac{2021}{1} = 2021 \text{ より, } \square = 2021.$$

$$\star = 2 \text{ のとき } \cdots \frac{2021}{2} = 1010.5 \text{ より, } \square = 1010. \cdots$$

(2) より、 $\star = 1, 2, \dots, 44$  のとき  $\frac{2021}{\star} - \frac{2021}{\star+1}$  は 1 以上なので、

$\star = 1, 2, 3, \dots, 44$  のとき、 $\square$  は異なる整数値をとる。

よって、ここまでで  $\square$  にあてはまる整数は 44 個。  $\cdots$  (7)

また、 $\star = 45$  のとき  $\cdots \frac{2021}{45} = 44.9 \cdots$  より、 $\square = 44$  で、これ以降は、

$$\frac{2021}{\star} - \frac{2021}{\star+1} \text{ が } 1 \text{ より小さいのでそれぞれの } \star \text{ の値に対して}$$

$\square$  の値が重なることがある。

$$\star = 2021 \text{ のとき } \cdots \frac{2021}{2021} = 1 \text{ より, } \square = 1 \text{ なので,}$$

$\star = 45, 47, \dots, 2021$  のとき、 $\square = 44, 43, \dots, 1$  となり、

$\square$  は 44 個の値をとる。  $\cdots$  (1)

(7)、(1) より、 $\star$  が 2021 以下の整数のとき、 $\square$  にあてはまる整数は全部で  $44 + 44 = \underline{88}$  個 です。