

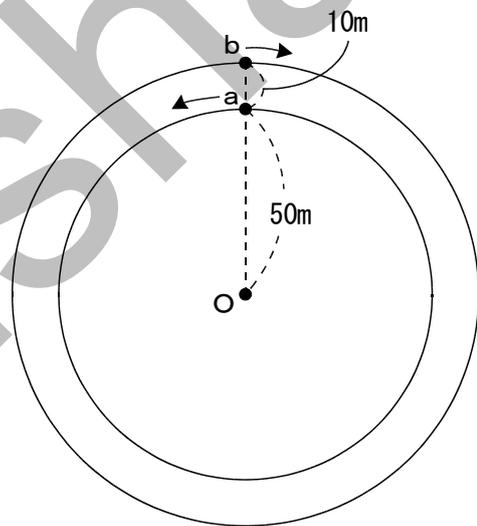
2021年度 桜蔭中学校(問題)

IV 円周率は、3.14を使って計算する人が多いです。しかし、本当は3.14159265...とどこまでも続いて終わりのない数です。この問題では、円周率を3.1として計算してください。

図のように点Oを中心とした半径の異なる2つの円上に道があります。Aさんは内側の道を地点aから反時計回りに、Bさんは外側の道を地点bから時計回りに、どちらも分速50mの速さで同時に進みはじめます。

AさんとBさんがいる位置を結ぶ直線が点Oを通るとき、ベルが鳴ります。ただし、出発のときはベルは鳴りません。

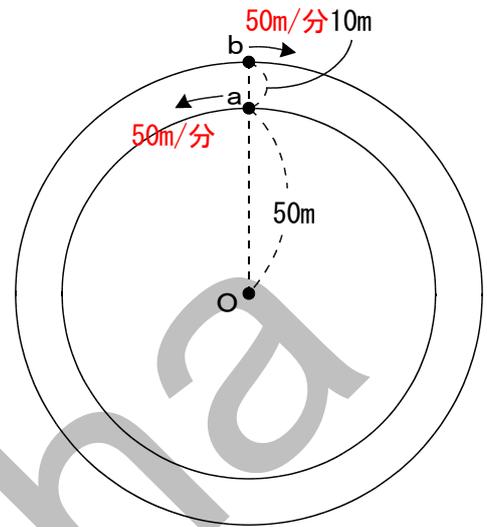
- (1) AさんとBさんが道を①周するのにかかる時間はそれぞれ何分ですか。
- (2) 1回目と2回目にベルが鳴るのは、それぞれ出発してから何分後ですか。
- (3) 出発してから何分かたったあと、2人とも歩く速さを分速70mに同時に変えたところ、5回目にベルが鳴るのは速さを変えなかったときと比べて1分早くなりました。速さを変えたのは、出発してから何分後ですか。



2020年度 桜蔭中学校(解説)

4

- (1) Aさんが通る道は1周
 $50 \times 2 \times 3.1 = 310\text{m}$ なので、
 Aさんが1周するのにかかる時間は
 $310 \div 50 = 6.2$ 分。
 Bさんが通る道は1周
 $(50 + 10) \times 2 \times 3.1 = 372\text{m}$ なので、
 Bさんが1周するのにかかる時間は
 $372 \div 50 = 7.44$ 分 です。



- (2) Aさん, Bさんが1分間に中心Oの周りを回転する角度は,

$$\text{Aさんが} 360 \div 6.2 = 360 \times \frac{10}{62} = \frac{1800}{31} \text{度,}$$

$$\text{Bさんが} 360 \div 7.44 = 360 \times \frac{100}{744} = \frac{4500}{93} \text{度。}$$

$$\text{よって, 2人が毎分進む角度の和は} \frac{1800}{31} + \frac{4500}{93} = \frac{9900}{93} \text{度で,}$$

1回目にベルが鳴るのは2人が出発してから合わせて180度進んだときなので,

$$\text{1回目は} 180 \div \frac{9900}{93} = 180 \times \frac{93}{9900} = \frac{93}{55} = 1\frac{38}{55} \text{分後。}$$

また, 2回目にベルが鳴るのは2人が出発してから合わせて360度進んだときなので,

$$\text{出発してから} 360 \div 180 = 2, \quad 1\frac{38}{55} \times 2 = 2\frac{76}{55} = 3\frac{21}{55} \text{分後 です。}$$

- (3) 2人が合わせて180度進むごとにベルがなるので, 速さを変えなかったとすると, ベルが5回鳴るのは2人が出発してから合わせて

$$180 \times 5 = 900 \text{度進んだときで, } 1\frac{38}{55} \times 5 = 5\frac{38}{11} = \frac{93}{11} \text{分後。}$$

$$\text{よって, 実際に5回目にベルが鳴ったのは出発してから} \frac{93}{11} - 1 = \frac{82}{11} \text{分後。}$$

2人が毎分進む角度の和は, 速さを変える前後で $50 \times 2 : 70 \times 2 = 5 : 7$ となるので,

$$\text{前が} \frac{9900}{93} \text{度/分, 後が} \frac{9900}{93} \times \frac{7}{5} = \frac{13860}{93} \text{度/分。}$$

よって, つるかめ算から..

$$\text{速さの和が初めからずっと} \frac{13860}{93} \text{度/分だったとすると, } \frac{82}{11} \text{分間にむ角度の和は}$$

$$\frac{13860}{93} \times \frac{82}{11} = \frac{103320}{93} \text{度となり, 実際より} \frac{103320}{93} - 900 = \frac{19620}{93} \text{度多くなる。}$$

よって, 速さを変えたのは, 出発してから

$$\frac{19620}{93} \div \left(\frac{13860}{93} - \frac{9900}{93} \right) = \frac{19620}{93} \div \frac{3960}{93} = \frac{19620}{3960} = \frac{109}{22} = 4\frac{21}{22} \text{分後 です。}$$