

2021年度 フェリス女学院中学校(問題)

(50 分)

- 5 1 以上の整数 y と y より大きい整数 x に対して,

$$[x, y] = (x - 1) \times y - x \times (y - 1)$$

と約束します。例えば $[7, 4] = 6 \times 4 - 7 \times 3 = 3$ です。

また, 3 以上の整数に対して, 記号 $\langle \rangle$ を次のように約束します。

$$\langle 3 \rangle = [2, 1]$$

$$\langle 4 \rangle = [3, 1]$$

$$\langle 5 \rangle = [4, 1] + [3, 2]$$

$$\langle 6 \rangle = [5, 1] + [4, 2]$$

$$\langle 7 \rangle = [6, 1] + [5, 2] + [4, 3]$$

以下のア～クにあてはまる数をそれぞれ求めなさい。

- (1) $\langle 8 \rangle = [\text{ア}, 1] + [6, \text{イ}] + [\text{ウ}, \text{エ}] = \text{オ}$
- (2) $\langle 2021 \rangle = \text{カ}$
- (3) $\langle \text{ク} \rangle = 289$
- (4) $\langle \text{ケ} \rangle = 2450$

2021年度 フェリス女学院中学校(解説)

5

- (1) $[x, y] = (x - 1) \times y - x \times (y - 1)$
 $= (x \times y - y) - (x \times y - x) = x \times y - y - x \times y + x$
 $= x - y$ となるので、
 また、 $\langle \square \rangle$ は $[A, B]$ ($A + B = \square$, $A > B$) を $B = 1, 2, 3 \dots$ とし足したもの
 ので
 $\langle 8 \rangle = [7, 1] + [6, 2] + [5, 3] \dots \text{ア, イ, ウ, エ}$
 $= (7 - 1) + (6 - 2) + (5 - 3) = 6 + 4 + 2 = 12 \dots \text{オ}$ です。
- (2) $\langle 2021 \rangle$ は、 $2021 \div 2 = 1010.5$ より、
 $\langle 2021 \rangle = [2020, 1] + [2019, 2] + \dots + [1011, 1010]$
 $= 2019 + 2017 + \dots + 1$ となり、
 逆から見ると、はじめが 1 で公差 2、個数が 1010 個の等差数列の和になるの
 で
 $\langle 2021 \rangle = (1 + 2019) \times 1010 \div 2 = 2020 \times 505 = 1020100$ です。
- (3) $\langle \text{㊦} \rangle = 289$ において、
 $289 = 17 \times 17$ となるので、289 は奇数の小さい順に 1 番目から 17 番目まで足
 したもの。奇数の 1 番目は 1、17 番目は $1 + 2 \times (17 - 1) = 33$ なので、
 $289 = 33 + 31 + \dots + 3 + 1$
 $= [34, 1] + [33, 2] + \dots$ と表せるので、
 $\text{㊦} = 34 + 1 = 35$ です。
- (4) $\langle \text{㊧} \rangle = 2450$ において、2450 を素因数分解すると、
 $2450 = 2 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7$ となるので、2450 は平方数ではない。
 1 からの奇数列の和ではないので、
 $2450 = A + (A - 2) + \dots + 2 \dots (7)$ とすると、
 A から 2 までの個数は $(A - 2) \div 2 + 1 = \frac{A-2}{2} + \frac{2}{2} = \frac{A}{2}$ 個なので、
 等差数列の和から、
 $2450 = (A + 2) \times \frac{A}{2} \div 2 = \frac{A \times (A + 2)}{4}$ と表せる。
 つまり、 $A \times (A + 2) = (2 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7) \times 4$
 $= (2 \times 7 \times 7) \times (5 \times 5 \times 4) = 98 \times 100$
 $= 98 \times (98 + 2)$ となるので、
 $A = 98$ 。
 よって、 $2450 = 98 + 96 + \dots + 2 = [99, 1] + [98, 2] + \dots$ となるので、
 $\text{㊧} = 99 + 1 = 100$ です。