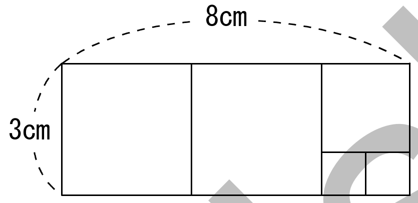
2021年度　城北中学校(問題)

5　長方形を以下の【操作】に従って，いくつかの正方形に分割します。

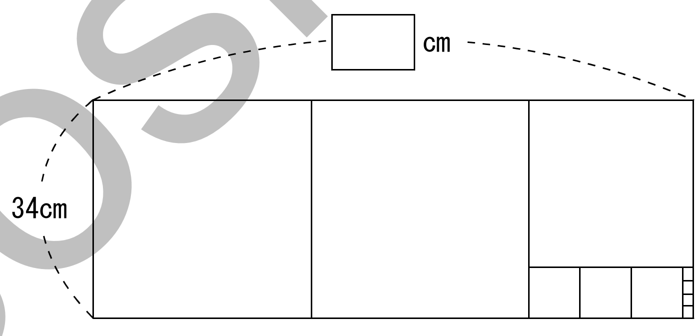
【操作】
① 短い方の辺を一辺とする正方形で，片側からできる限り分解する。
② 長方形が残った場合はその残った長方形に対して，①を行う。
残りの長方形ができなくなるまでこれを繰り返す。

例えば，短い方の辺が 3cm，長い方の辺が 8cm の長方形に【操作】を行うと，
下の図のように分割されました。



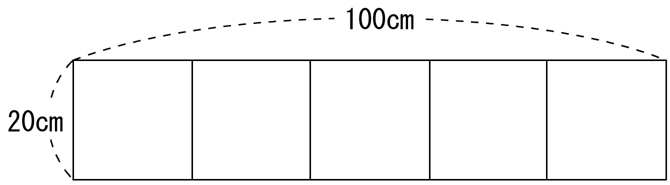
(1)　短い方の辺が 27cm，長い方の辺が 62cm の長方形に【操作】を行うと，何個の正方形に分割されますか。

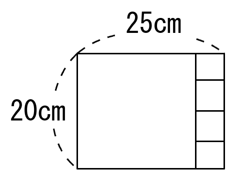
(2)　下の図のように，短い方の辺が 34cm の長方形に【操作】を行うと，10 個の正方形に分割されました。図の $\boxed{}$ にあてはまる数を求めなさい。



(3)　短い方の辺が 20cm の長方形に【操作】を行うと，4 個の正方形に分割されました。このような長方形は全部で何通りありますか。

(4)　短い方の辺が 20cm の長方形に【操作】を行うと，5 個の正方形に分割されました。このような長方形は全部で 8 通りあります。下の図は，そのうちの 2 つの長方形に【操作】を行ったものです。





長い方の辺が 100cm の長方形は 1 種類の正方形に分割され，長い方の辺が 25cm の長方形は 2 種類の正方形に分割されています。
　下の表は，8 通りの長方形それぞれの，長い方の辺の長さと，【操作】によってできた正方形の種類の数についてまとめたものです。

下の表の $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{カ}}$ にあてはまる数を求め，解答用紙の表を埋(う)めなさい。
ただし， $\boxed{\text{ア}}$ ＞ $\boxed{\text{イ}}$ ＞ $\boxed{\text{ウ}}$ とします。

長い方の辺の長さ(cm)	100	70	$\boxed{\text{ア}}$	$\frac{140}{3}$	$\boxed{\text{イ}}$	$\boxed{\text{ウ}}$	28	25
正方形の種類の数	1	2	$\boxed{\text{エ}}$	2	3	$\boxed{\text{オ}}$	$\boxed{\text{カ}}$	2

2021年度　城北中学校(解説)

5

(1)　62 ÷ 27 ＝ 2 余り 8，‥1 辺 27cm の正方形が 2 個。
27 ÷ 8 ＝ 3 余り 3，‥1 辺 8cm の正方形が 3 個。
8 ÷ 3 ＝ 2 余り 2，‥1 辺 3cm の正方形が 2 個。
3 ÷ 2 ＝ 1 余り 1，‥1 辺 3cm の正方形が 1 個。
2 ÷ 1 ＝ 2　　　　‥1 辺 1cm の正方形が 2 個。
よって，全部で 2 ＋ 3 ＋ 2 ＋ 1 ＋ 2 ＝ 10 個　の正方形に分割されます。

(2)　正方形は 4 種類あり，一番小さい正方形の 1 辺の長さを比の 1 とすると，
2 番目に小さい正方形の 1 辺の長さは 4，3 番目に小さい正方形の 1 辺の長さは
4 × 3 ＋ 1 ＝ 13，一番大きい正方形の 1 辺の長さは 4 ＋ 13 ＝ 17。
よって，比の 17 が 34cm なので，1 ＝ 34 ÷ 17 ＝ 2cm。
また，図全体の長方形の横の長さ($\boxed{}$ cm)は 17 × 2 ＋ 13 ＝ 47　なので，
$\boxed{}$ ＝ 2 × 47 ＝ 94　です。

(3)　長い方の辺の長さを A cm として，操作の回数で分けると，
操作が 1 回のとき‥A ÷ 20 ＝ 4　より，A ＝ 20 × 4 ＝ 80。

操作が 2 回のとき‥A ÷ 20 ＝ B 余り C(B は 1 以上の整数，C は 20 未満の数)
，20 ÷ C ＝ D，D は 1 より大きい整数で B ＋ D ＝ 4。
よって，(B，D)＝(1，3)，(2，2)より，
(B，D，C)＝(1，3，$\frac{20}{3}$)，(2，2，10)。

よって，A ＝ 20 × B ＋ C ＝ 20 × 1 ＋ $\frac{20}{3}$ ＝ $\frac{80}{3}$，
A ＝ 20 × 2 ＋ 10 ＝ 50　となるので，
A ＝ $\frac{80}{3}$，50。

操作が 3 回のとき‥A ÷ 20 ＝ B 余り C(B は 1 以上の整数，C は 20 未満の数)
20 ÷ C ＝ D 余り E(D は 1 以上の整数，E は C より小さい)
C ÷ E ＝ F，F は 1 より大きい整数で B ＋ D ＋ F ＝ 4。
よって，(B，D，F)＝(1，1，2)となるので，
C ＝ E × 2，20 ＝ C × D ＋ E ＝(E × 2)× 1 ＋ E ＝ E × 3
より，E ＝ 20 ÷ 3 ＝ $\frac{20}{3}$，C ＝ $\frac{20}{3}$ × 2 ＝ $\frac{40}{3}$。
よって，A ＝ 20 × B ＋ C ＝ 20 × 1 ＋ $\frac{40}{3}$ ＝ $\frac{100}{3}$。

$A = \dfrac{100}{3}$。

操作が4回のとき‥A÷20＝1余りB，20÷B＝1余りC，B÷C＝1余りE，
C÷E＝1　となるが，
Cは E より大きいので，C÷E＝1にならないので不適当。

以上の結果から，A＝80，50，$\dfrac{80}{3}$，$\dfrac{100}{3}$。つまり長方形は全部で4通り　あります。

(4)　長い方の辺の長さをA cmとして，操作の回数で分けると，
操作が1回のとき‥A÷20＝5　より，A＝100で正方形は1種類。

操作が2回のとき‥A÷20＝B余りC（Bは1以上の整数，Cは20未満の数），
20÷C＝D，Dは1より大きい整数でB＋D＝5。
（B，D）＝(3，2)，(2，3)，(1，4)。また，C＝20÷Dより，
よって，（B，D，C）＝(3，2，10)，(2，3，$\dfrac{20}{3}$)，(1，4，5)
となるので，A＝20×B＋Cより，
$A = 20 \times 3 + 10 = 70$，$A = 20 \times 2 + \dfrac{20}{3} = \dfrac{140}{3}$，
$A = 20 \times 1 + 5 = 25$。
よって，A＝70，$\dfrac{140}{3}$，25で，このとき，正方形は2種類。

操作が3回のとき‥A÷20＝B余りC（Bは1以上の整数，Cは20未満の数），
20÷C＝D余りE（Dは1以上の整数，EはCより小さい），
C÷E＝F，Fは1より大きい整数でB＋D＋F＝5。
よって，（B，D，F）＝(2，1，2)，(1，2，2)，(1，1，3)。
また，C＝E×Fより，
（B，D，F，C）＝(2，1，2，E×2)‥(あ)，
(1，2，2，E×2)‥(い)，
(1，1，3，E×3)‥(う)。
また，20＝C×D＋Eなので，
(あ)のとき‥20＝(E×2)×1＋E＝E×3より，
$E = 20 \div 3 = \dfrac{20}{3}$，$C = \dfrac{20}{3} \times 2 = \dfrac{40}{3}$。
よって，$A = 20 \times B + C = 20 \times 2 + \dfrac{40}{3}$
$= \dfrac{160}{3}$。
(い)のとき‥20＝(E×2)×2＋E＝E×5より，
E＝20÷5＝4，C＝4×2＝8。
よって，A＝20×1＋8＝28。
(う)のとき‥20＝(E×3)×1＋E＝E×4より，
E＝20÷4＝5，C＝5×3＝15。

よって，A ＝ 20 × 1 ＋ 15 ＝ 35。

（あ），（い），（う）から，A ＝ $\frac{160}{3}$，28，35 で，このとき，正方形は 3 種類。

操作が 4 回のとき‥A ÷ 20 ＝ 1 余り B（B は 20 より小さい数），
20 ÷ B ＝ 1 余り C（C は B より小さい数），
B ÷ C ＝ 1 余り D（D は C より小さい数），
C ÷ D ＝ 2　となるので，
C ＝ D × 2，B ＝ C × 1 ＋ D ＝（D × 2）× 1 ＋ D ＝ D × 3。
20 ＝ B × 1 ＋ C ＝（D × 3）× 1 ＋ D × 2 ＝ D × 5 より，
D ＝ 20 ÷ 5 ＝ 4。
よって，C ＝ 4 × 2 ＝ 8，B ＝ 8 × 1 ＋ 4 ＝ 12，
A ＝ 20 × 1 ＋ 12 ＝ 32。
よって，A ＝ 32 で，このとき正方形は 4 種類。

以上の結果から

長い方の辺の長さ(cm)	100	70	ア $\frac{160}{3}$	$\frac{140}{3}$	イ 35	ウ 32	28	25
正方形の種類の数	1	2	エ 3	2	3	オ 4	カ 3	2

‥のようになります。