

2020年度 千葉日本大学第一中学校(問題)

- 4 次のように，ある規則にしたがって分数が並んでいます。
[※式や考え方を書きなさい]

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \dots$$

- (1) $\frac{1}{9}$ は何番目の分数ですか。
- (2) 79番目の分数はいくつですか。
- (3) 先頭から79番目までの分数の和はいくつですか。

2020年度 千葉日本大学第一中学校(解説)

4

(1) 数列を

$$\underbrace{\frac{1}{2}}_{1\text{組}}, \underbrace{\frac{2}{3}, \frac{1}{3}}_{2\text{組}}, \underbrace{\frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}}_{3\text{組}}, \underbrace{\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}}_{4\text{組}}, \dots \text{のように組に分けると,}$$

1組, 2組, 3組, $\dots$ に含まれる分数は1個, 2個, 3個, $\dots$,
また, 1組, 2組, 3組, $\dots$ の分数の分母は2, 3, 4, $\dots$ となっているので,
 $\frac{1}{9}$ は $9 - 1 = 8$ 組の最後の分数で,

初めから $1 + 2 + 3 + \dots + 8 = (1 + 8) \times 8 \div 2 = \underline{36 \text{ 番目}}$ です。

(2) $1 + 2 + 3 + \dots + 10 = 55$,

$$1 + 2 + 3 + \dots + 11 = 55 + 11 = 66,$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + 12 = 66 + 12 = 78.$$

つまり, 12組まで分数は78個あるので, 79番目の分数は
13組の最初の分数。よって, 分母は $13 + 1 = 14$ で, 分子は $14 - 1 = 13$
なので, $\frac{13}{14}$ です。

(3) 1組の和は $\frac{1}{2}$, 2組の和は $\frac{2+1}{3} = \frac{3}{3} = 1$, 3組の和は $\frac{3+2+1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$,

$$4組の和は \frac{4+3+2+1}{5} = \frac{10}{5} = 2, \dots \text{となり,}$$

初めが $\frac{1}{2}$ で, 公差が $\frac{1}{2}$ の等差数列になっている。

$$\text{また, 12組の和は } \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times (12-1) = \frac{1}{2} + \frac{11}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ なので,}$$

$$1組から12組までの和は \left(\frac{1}{2} + 6 \right) \times 12 \div 2 = \frac{13}{2} \times 6 = 39.$$

79番目の数は13組の最初の数の $\frac{13}{14}$ なので,

$$\text{先頭から79番目までの分数の和は } 39 + \frac{13}{14} = \underline{39\frac{13}{14}} \text{ です。}$$