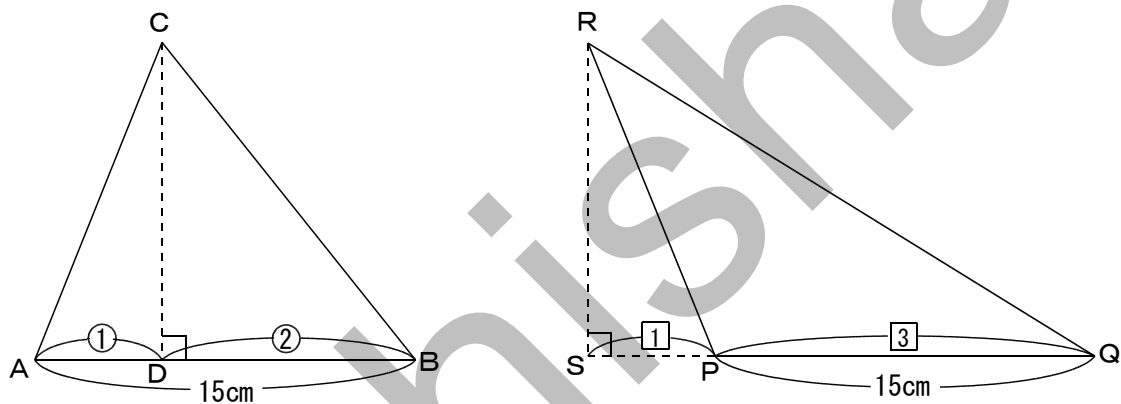


2020年度 渋谷教育学園渋谷中学校(問題)

4

三角形 ABC と三角形 PQR があります。この 2 つの三角形はともに面積が 75cm^2 で、辺 AB の長さ、辺 PQ の長さはどちらも 15cm です。下の図のように、点 C から辺 AB に、点 R から辺 PQ の延長上に、それぞれ垂線を引き、その交点をそれぞれ D , S とすると、 $AD : DB = 1 : 2$, $SP : PQ = 1 : 3$ となりました。次の問いに答えなさい。

ただし、円周率は 3.14 とし、すい体の体積は「(底面積) $\times$ (高さ) $\div 3$ 」で求めることができます。また、(3), (4) は答を求めるのに必要な式、考え方なども順序よくかきなさい。



(1) AB を軸として三角形 ABC を 1 回転させてできる立体の体積は何 cm^3 ですか。

(2) SR を軸として三角形 PQR を 1 回転させてできる立体の体積は何 cm^3 ですか。

点 A と点 P , 点 B と点 Q がそれぞれ一致するように、辺 AB と辺 PQ をぴったりあわせ、三角形 ABC と三角形 PQR を重なる部分ができるようにおきました。重なる部分を図形 あ とします。

(3) $AB(PQ)$ を軸として図形 あ を 1 回転させてできる立体の体積は何 cm^3 ですか。

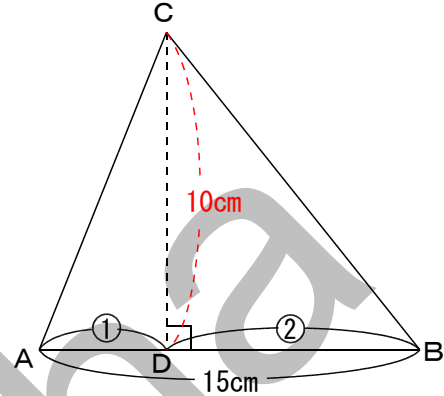
(4) SR を軸として図形 あ を 1 回転させてできる立体の体積は何 cm^3 ですか。

2020年度 渋谷教育学園渋谷中学校(解説)

4

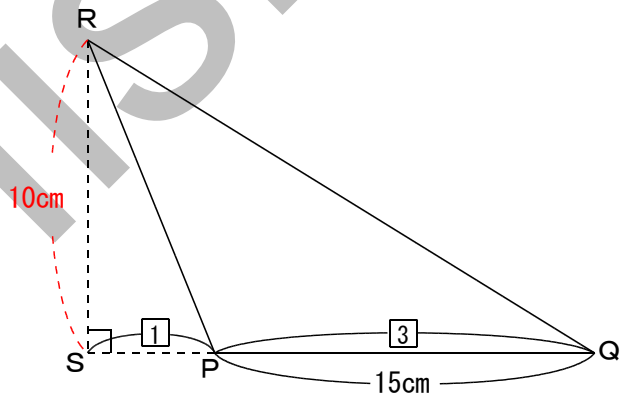
- (1) 右図で、 $15 \times CD \div 2 = 75$ より、
 $CD = 75 \times 2 \div 15 = 10\text{cm}$ なので、
 $\triangle ABC$ を AB を軸として 1 回転させて
 できる立体の体積は

$$\begin{aligned}
 & 10 \times 10 \times 3.14 \times AD \times \frac{1}{3} \\
 & + 10 \times 10 \times 3.14 \times DB \times \frac{1}{3} \\
 & = 10 \times 10 \times 3.14 \times (AD + DB) \times \frac{1}{3} \\
 & = 10 \times 10 \times 3.14 \times AB \times \frac{1}{3} = 10 \times 10 \times 3.14 \times 15 \times \frac{1}{3} = 500 \times 3.14 \\
 & = \underline{1570\text{cm}^3} \text{ です。}
 \end{aligned}$$



- (2) 右図で、 $\triangle PQR$ の高さ RS は
 CD と同様に 10cm 。
 また、 $\boxed{1} = 15 \div 3 = 5\text{cm}$ なので、
 $SQ = 5 + 15 = 20\text{cm}$ 。よって、
 $\triangle PQR$ を SR を軸として 1 回転
 させてできる立体の体積は

$$\begin{aligned}
 & 20 \times 20 \times 3.14 \times 10 \times \frac{1}{3} \\
 & - 5 \times 5 \times 3.14 \times 10 \times \frac{1}{3} = (400 - 25) \times 3.14 \times 10 \times \frac{1}{3} \\
 & = 375 \times 3.14 \times 10 \times \frac{1}{3} = 1250 \times 3.14 = \underline{3925\text{cm}^3} \text{ です。}
 \end{aligned}$$



- (2) 右図で、 $\triangle SBR$ と $\triangle FBE$ は
 相似なので、
 $EF : FB = RS : SB = 10 : 20$
 $= 1 : 2$ 。…(7)

また、 $\triangle CAD$ と $\triangle EAF$ は相似で

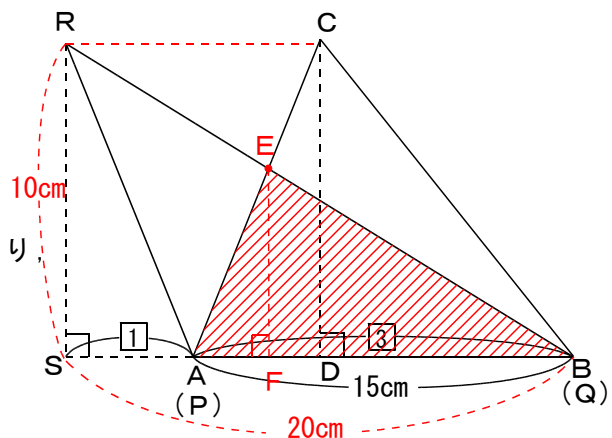
$$AD = 15 \times \frac{1}{1+2} = 15 \times \frac{1}{3} = 5\text{cm} \text{ より}$$

$$AF : EF = AD : CD = 5 : 10 = 1 : 2。 \dots (i)$$

(7), (i) より、

$$EF : FB = 1 : 2 = 2 : 4,$$

$AF : EF = 1 : 2$ となるので、



$$AF : EF : FB = 1 : 2 : 4. \quad \text{よって, } AF = 15 \times \frac{1}{1+4} = 15 \times \frac{1}{5} = 3\text{cm},$$

$EF = 3 \times 2 = 6\text{cm}$ となるので, 上図の斜線部分㉔を AB を軸として 1 回転させてできる立体の体積は (1) と同様に

$$\begin{aligned} 6 \times 6 \times 3.14 \times AB \times \frac{1}{3} &= 6 \times 6 \times 3.14 \times 15 \times \frac{1}{3} \\ &= 180 \times 3.14 = \underline{565.2\text{cm}^3} \quad \text{です。} \end{aligned}$$

(3) SR を軸として図形㉔を 1 回転

させてできる立体は, 右図で

台形 $GSBE$ を SR を軸として 1 回転

させてできる円すい台…(7)から,

台形 $GSAE$ を SR を軸として 1 回転

させてできる円すい台…(i)を除いた

もの。

(7)の体積は…

右図で, $\triangle AGE$ と $\triangle ASD$ が相似で, 相似比は $8 : 20 = 2 : 5$ なので, $RG : RS = 2 : 5$ 。

よって, $RG = 10 \times \frac{2}{5} = 4\text{cm}$ と

なるので, (7)の体積は

$$\begin{aligned} &20 \times 20 \times 3.14 \times 10 \times \frac{1}{3} \\ &\quad - 8 \times 8 \times 3.14 \times 4 \times \frac{1}{3} \\ &= \left(\frac{4000}{3} - \frac{256}{3} \right) \times 3.14 = \frac{3744}{3} \times 3.14 = 1248 \times 3.14\text{cm}^3. \end{aligned}$$

(i)の体積は…

右上図で, $\triangle HAS$ と $\triangle HEG$ は相似で, 相似比は $5 : 8$ なので,

$HS : HG = 5 : 8$ から, $HS : HG : SG = 5 : 8 : (8 - 5) = 5 : 8 : 3$ で,

$SG = EF = 6\text{cm}$ より, $HS = 6 \times \frac{5}{3} = 10\text{cm}$, $HG = 10 + 6 = 16\text{cm}$ 。

よって, (i)の体積は

$$\begin{aligned} &8 \times 8 \times 3.14 \times 16 \times \frac{1}{3} - 5 \times 5 \times 3.14 \times 10 \times \frac{1}{3} \\ &= \left(\frac{1024}{3} - \frac{250}{3} \right) \times 3.14 = \frac{774}{3} \times 3.14 = 258 \times 3.14\text{cm}^3. \end{aligned}$$

したがって, SR を軸として図形㉔を 1 回転させてできる立体の体積は

$$\begin{aligned} &1248 \times 3.14 - 258 \times 3.14 = (1248 - 258) \times 3.14 = 990 \times 3.14 \\ &= \underline{3108.6\text{cm}^3} \quad \text{です。} \end{aligned}$$

