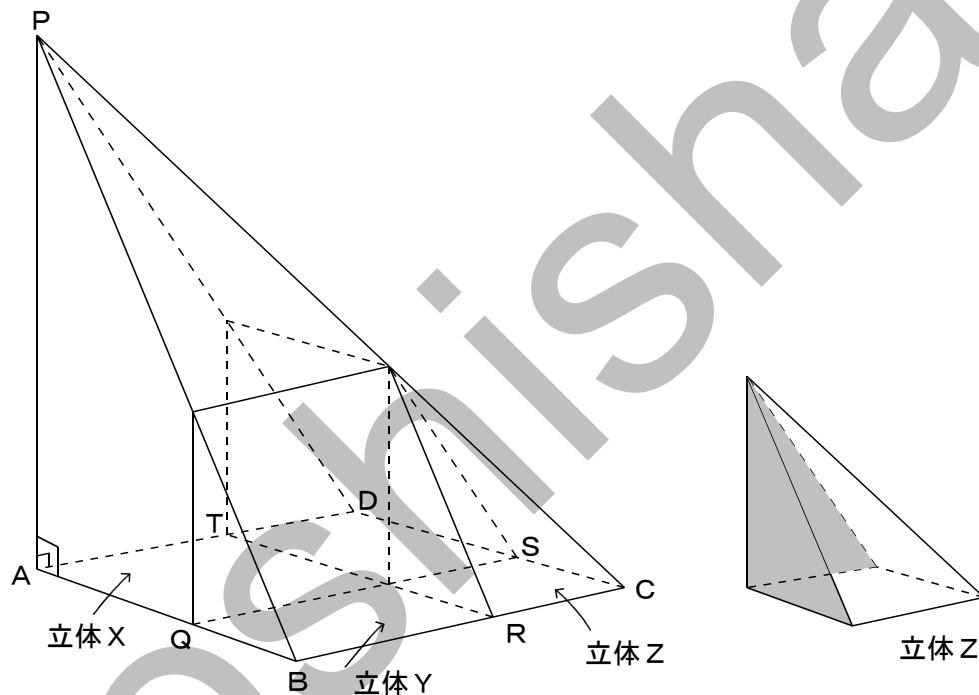


2020年度 渋谷教育学園幕張中学校(問題)

5

図のように底面が正方形の角すい $P-ABCD$ があります。三角形 APB と三角形 APD はどちらも角 A が直角の直角三角形です。4 つの辺 AB , BC , CD , DA 上にそれぞれ点 Q , R , S , T をとります。直線 QS と直線 AD , 直線 TR と直線 AB はそれぞれ平行で, $BR:RC=AQ:QB$ です。

図



このとき, 次の各問いに答えなさい。

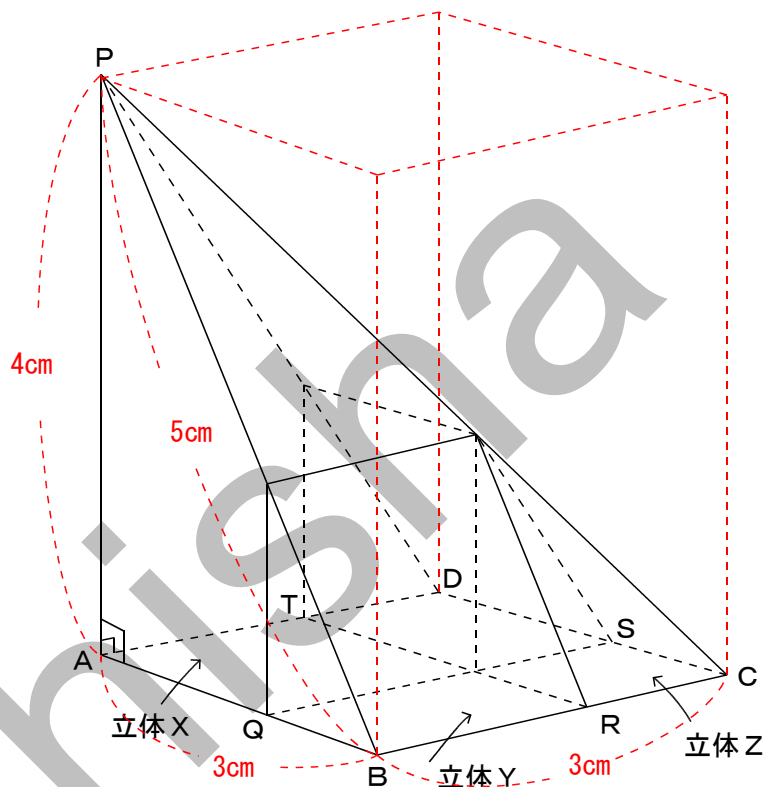
ただし, 角すいの体積は (底面積) $\times$ (高さ) $\div 3$ で求められるものとします。また, 立体のすべての面の面積をたし合わせたものを表面積といいます。

- (1) 辺 AP , AB , PB の長さはそれぞれ 4cm , 3cm , 5cm のとき, 角すい $P-ABCD$ の表面積は何 cm^2 ですか。
- (2) この立体を点 Q と点 S を通るように底面に垂直な平面で切り, さらに点 T と点 R を通るように底面に垂直な平面で切り, 切り取ってできた面にだけ色をぬります。点 A , B , C を含む立体をそれぞれ立体 X , Y , Z とし, 立体 Y と立体 X の体積の比を $4:1$ とするとき, 次の各問いに答えなさい。
 - ① 立体 X と立体 Z の体積の比をもっともかんたんな整数の比で表しなさい。
 - ② 立体 Z において, 色をぬった部分の面積と, 色をぬっていない部分の面積の比が $1:4$ のとき, 立体 X と立体 Z の表面積の比をもっともかんたんな整数の比で表しなさい。

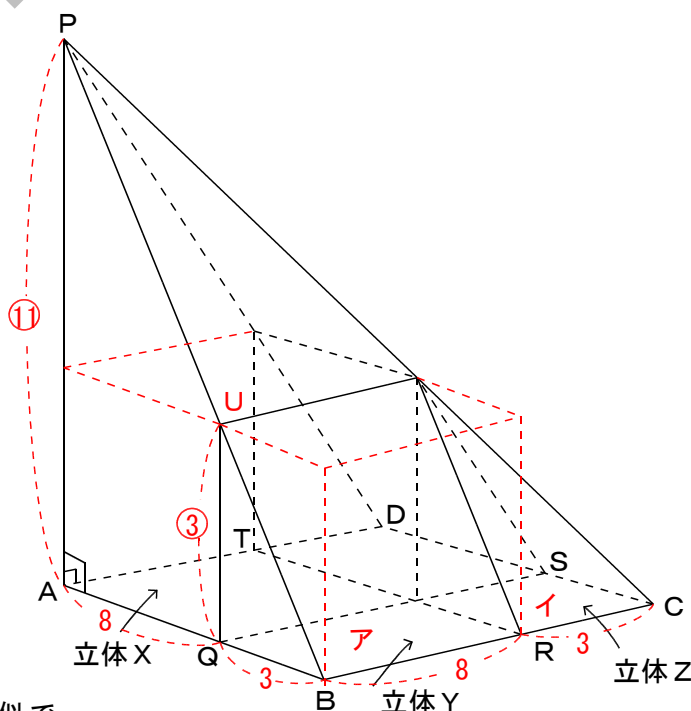
2020年度 渋谷教育学園幕張中学校(解説)

5

- (1) 右図のような、直方体
 がかけるので、
 $\angle PBC = \angle PDC = 90^\circ$
 で、 $\triangle PAD$ と $\triangle PAB$ は
 合同より、 $PD = 5\text{cm}$ 。
 よって、四角すいの
 表面積は
 $3 \times 3 + (4 \times 3 \div 2) \times 2$
 $+ (5 \times 3 \div 2) \times 2$
 $= 9 + 12 + 15$
 $= \underline{36\text{cm}^2}$ です。



- (2) ① 右図において、
 立体Yの底面積をア、
 立体Zの底面積をイとすると、
 立体Yと立体Zの体積比は
 $\text{ア} \times UQ \times \frac{1}{2} : \text{イ} \times UQ \times \frac{1}{3}$
 $= \text{ア} \times \frac{1}{2} : \text{イ} \times \frac{1}{3}$ で、
 これが4:1を表すので
 $\text{ア} : \text{イ} = 4 \div \frac{1}{2} : 1 \div \frac{1}{3}$
 $= 8 : 3$ 。
 よって、 $BR : RC = 8 : 3$
 となるので、条件から
 $BR : RC = AQ : QB$
 $= 8 : 3$ 。
 また、 $\triangle PAB$ と $\triangle UQB$ は相似で
 相似比は $AB : QB = (8 + 3) : 3 = 11 : 3$
 なので、 $PA : UQ = 11 : 3$ 。



それぞれの長さの比を実際の値として計算すると、
角すい $P-ABCD$ と立体 Y と立体 Z の体積比は

$$(8+3) \times (8+3) \times 11 \times \frac{1}{3} : 8 \times 3 \times 3 \times \frac{1}{2} : 3 \times 3 \times 3 \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1331}{3} : 36 : 9 = 1331 : 108 : 27 \quad \text{となるので,}$$

立体 X と立体 Z の体積比は

$$\{1331 - (108 \times 2 + 27)\} : 27 = (1331 - 243) : 27 = \underline{1088 : 27} \quad \text{です。}$$

② ①のように、長さの比を実際の

長さとして計算すると、

立体 Z において、

色を塗った 2 枚の三角形の
面積の和は

$$(3 \times 3 \div 2) \times 2 = 9。$$

よって、条件から

立体 Z の表面積は

$$9 \times (1 + 4) = 45。 \cdots (7)$$

右図で、四角すい $P-UVWX$

は、立体 Z と相似で、相似比は

$$UV : RC = 8 : 3 \quad \text{なので,}$$

表面積の比は

$$8 \times 8 : 3 \times 3 = 64 : 9$$

なので、四角すい $P-UVWX$

$$\text{の表面積は } 45 \times \frac{64}{9} = 320。$$

立体 X の表面積は、この四角すい

の表面積と面積が $8 \times 3 = 24$ の

長方形 4 枚の面積を合わせたものなので

$$320 + 24 \times 4 = 320 + 96 = 416。 \cdots (1)$$

(7)、(1) から、立体 X と立体 Z の表面積の比は

$$\underline{416 : 45} \quad \text{です。}$$

