2020年度　専修大学松戸中学校(問題)

7　S中学のT先生とMさんが，「11 の倍数の見つけ方」について会話しています。あとの各問いに答えなさい。

T先生：Mさん，11 の倍数の見つけ方を知っていますか？
Mさん：3の倍数や4の倍数なら知っていますが，11 の倍数は知りません。
T先生：それは，**1けたおきに加えた和どうしの差を 11 で割る**というものです。
たとえば[3817]の場合，
1けたおきに加えた和→ 3 ＋ 1 ＝ 4‥(A)，8 ＋ 7 ＝ 15‥(B)
(A)と(B)の差　　→ 15 － 4 ＝ 11‥(C)
（C)が）11 で割りきれるので，[3817]は 11 の倍数だとわかるのです。
もう1つ例をあげると，[25487]の場合，
1けたおきに加えた和→ 2 ＋ 4 ＋ 7 ＝ 13‥(A)，5 ＋ 8 ＝ 13‥(B)
(A)と(B)の差　　→ 13 － 13 ＝ 0‥(C)
この場合も(C)が 11 で割りきれるので，[25487]は 11 の倍数だとわかります。
Mさん：へぇ～。びっくりしました。
T先生：それでは，さっそく問題ですが。7けたの数[2N30958]が 11 の倍数になるとき，Nにあてはまる数はなんですか？
Mさん：はい。答えは $\boxed{\text{ア}}$ です。
T先生：正解です。よくできましたね。
Mさん：でも，T先生。どうしてそのようになるのですか？
T先生：それでは，99，9999，999999 のように，9 だけが偶数(ぐうすう)個並んだ数は 11 の倍数数になることを説明してみてください。
Mさん：はい。999999 の場合で説明すると，
999999 ＝ 990000 ＋ 9900 ＋ 99
＝ 11 × 90000 ＋ 11 × 900 ＋ 11 × 9
＝ 11 ×（90000 ＋ 900 ＋ 9）
＝ 11 × $\boxed{\text{イ}}$
これでどうですか？
T先生：よくできました。そうすると，9 だけが偶数個並んだ数に 11 を加えた数も 11 の倍数になりますね。ですから，
99 ＋ 11 ＝ 110，9999 ＋ 11 ＝ 10010，999999 ＋ 11 ＝ 1000010，･･･

も 11 の倍数です。ところで，これらの数の一の位の数字はすべて 0 ですから，これらを 10 で割った数も 11 の倍数になりますね。
Mさん：つまり，11，1001，100001，･･･のように，2個の 1 の間に偶数個の 0 が並ぶような数は 11 の倍数だということですね。
T先生：その通り。これらの性質を使うことで，11 の倍数の見分け方がわかるのです。たとえば，[3817]の場合で説明しましょう。
3817 ＝ 3000 ＋ 800 ＋ 10 ＋ 7

$= (1001 - 1) \times 3 + (99 + 1) \times 8 + (11 - 1) \times 1 + 7$
$= 1001 \times 3 - 3 + 99 \times 8 + 8 + 11 \times 1 - 1 + 7$
$= 11 \times (91 \times 3 + 9 \times 8 + 1) - 3 + 8 - 1 + 7$
$= \underline{11 \times (91 \times 3 + 9 \times 8 + 1)} + \underline{(8 + 7) - (3 + 1)}$ ・・・(＊)

となります。＿＿の部分は 11 の倍数ですから，- - - -の部分が 11 の倍数であれば[3817]も 11 の倍数だとわかるのです。

Ｍさん：なるほど！よくわかりました。

(1)　次の①～④のうち，11 の倍数はどれですか。全て選び，番号で答えなさい。

① 773142　② 2701384　③ 9999999　④ 10000001

(2)　$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$にあてはまる数をそれぞれ答えなさい。

(3)　Ｍさんは家に帰ってから，Ｔ先生の説明にならって，[25484]が 11 の倍数になる理由を考えました。次の式はＴ先生が作った(＊)の式と同じ内容のものです。$\boxed{\text{ウ}}$～$\boxed{\text{オ}}$にあてはまる数をそれぞれ答えなさい。

$11 \times (\boxed{\text{ウ}} \times 2 + \boxed{\text{エ}} \times 5 + \boxed{\text{オ}} \times 4 + 8) + (2 + 4 + 7) - (5 + 8)$

2020年度　専修大学松戸中学校(解説)

7

(1) 1けたおきに加えた和，それらの差を調べると，

① 773124‥7 ＋ 3 ＋ 2 ＝ 12，7 ＋ 1 ＋ 4 ＝ 12 で，12 － 12 ＝ 0 は 11 で割りきれるので 11 の倍数。

② 2701384‥2 ＋ 0 ＋ 3 ＋ 4 ＝ 9，7 ＋ 1 ＋ 8 ＝ 16 で，16 － 9 ＝ 7 は 11 で割りきれないので 11 の倍数ではない。

③ 9999999‥9 ＋ 9 ＋ 9 ＋ 9 ＝ 36，9 ＋ 9 ＋ 9 ＝ 27 で，36 － 27 ＝ 9 は 11 で割りきれないので 11 の倍数ではない。

④ 10000001‥1 ＋ 0 ＋ 0 ＋ 0 ＝ 1，0 ＋ 0 ＋ 0 ＋ 1 ＝ 1 で，1 － 1 ＝ 0 は 11 で割りきれるので，11 の倍数。

よって，11 の倍数は①，④　です。

(2) ア‥2N30958 において，1けたおきに加えた和は，

2 ＋ 3 ＋ 9 ＋ 8 ＝ 22 と

N ＋ 0 ＋ 5 ＝ N ＋ 5。N は 0 ～ 9 の整数なので。

N ＋ 5 ＜ 22。

よって，2N30958 が 11 の倍数になるとき

22 －（N ＋ 5）＝ 17 － N が 11 で割り切れる数なので，

17 － N ＝ 11 より，N ＝ 17 － 11 ＝ 6‥ア　です。

イ‥90000 ＋ 900 ＋ 9 ＝ 90909‥イ　です。

(3) 25487 ＝ 10000 × 2 ＋ 1000 × 5 ＋ 100 × 4 ＋ 10 × 8 ＋ 7

＝（9999 ＋ 1）× 2 ＋（（1001 － 1）× 5 ＋（99 ＋ 1）× 4 ＋（11 － 1）× 8 ＋ 7

＝ 9999 × 2 ＋ 2 ＋ 1001 × 5 － 5 ＋ 99 × 4 ＋ 4 ＋ 11 × 8 － 8 ＋ 7

＝ 11 × 909 × 2 ＋ 2 ＋ 11 × 91 × 5 － 5 ＋ 11 × 9 × 4 ＋ 4 ＋ 11 × 8 － 8 ＋ 7

＝ 11 ×（909 × 2 ＋ 91 × 5 ＋ 9 × 4 ＋ 8）＋ 2 － 5 ＋ 4 － 8 ＋ 7

＝ 11 ×（909 × 2 ＋ 91 × 5 ＋ 9 × 4 ＋ 8）＋（2 ＋ 4 ＋ 7）－（5 ＋ 8）

‥となるので，ウ 909，エ 91，オ 9　です。