

2020年度 桜蔭中学校(問題)

IV

1個10g, 20g, 60gの球があります。

10gの球には1から100までの整数のうち、4の倍数すべてが1つずつ書いてあります。

20gの球には1から100までの整数のうち、3で割って1余る数がすべて1つずつ書いてあります。

60gの球には1から100までの4の倍数のうち、3で割って1余る数がすべて1つずつ書いてあります。ただし、同じ重さの球にはすべて異なる数が書いてあります。

- (1) 60gの球に書いてある数字を分母、20gの球に書いてある数字を分子として分数をつくります。このときできる1未満の分数のうち、分母と分子を5で約分できる分数の合計を求めなさい。
- (2) ① これらの球から13個の球を選んで、その重さの合計がちょうど250gになるようにします。10gの球、20gの球、60gの球をそれぞれ何個ずつ選べばよいですか。考えられるすべての場合を答えなさい。ただし、選ばない重さの球があってもよいものとします。解答らんは全部使うとは限りません。
- ② ①で求めた選び方の中で、60gの球の個数が2番目に多い選び方について考えます。13個の球に書かれている数の合計が4割ると2余りました。合計が最も大きくなる時、その合計を求めなさい。

2020年度 桜蔭中学校(解説)

4

- (1) 10gの球に書いてある数字は

4, 8, 12, ..., 100で, 初めが4で公差が4の等差数列・・・(ア)。

20gの球に書いてある数字は

4, 7, 10, ..., 100で, 初めが4, 公差が3の等差数列・・・(イ)。

60gの球に書いてある数字は(ア), (イ)に共通の数字で

初めが4で, 公差が4と3の最小公倍数の12である等差数列で

4, 16, 28, 40, 52, 64, 76, 88, 100。・・・(ウ)

また, (イ)の数のうち5の倍数は最初が10で, 公差が3と5の最小公倍数の15である等差数列で10, 25, 40, 55, 70, 85, 100・・・(エ)。

また, (ウ)の数のうち5の倍数は40, 100・・・(オ) となるので,

(オ)の数を分母, (エ)の数を分子とする1未満の分数の和は

$$\begin{aligned} \frac{10+25}{40} + \frac{10+25+40+55+70+85}{100} &= \frac{35}{40} + \frac{(10+85) \times 6 \div 2}{100} = \frac{7}{8} + \frac{285}{100} = \frac{7}{8} + \frac{57}{20} \\ &= \frac{35}{40} + \frac{114}{40} = \frac{149}{40} = 3\frac{29}{40} \text{ です。} \end{aligned}$$

- (2) ① 60g, 20g, 10gの球の合計が250gになるとき,

それぞれの球の個数を調べ, 合計が13個になる場合をさがすと・・・

(60gの球の個数, 20gの球の個数, 10gの球の個数)

= (4, 0, 1), ... 合計が13個にならない。

(3, 3, 1), (3, 2, 3), (3, 1, 5), (3, 0, 7), ... 合計が13個にならない。

(2, 6, 1), (2, 5, 3), (2, 4, 5), (2, 3, 7), (2, 2, 9) ... 合計が13個

(1, 9, 1), (1, 8, 3), (1, 7, 5), ... 合計が13個

(0, 12, 1) ... 合計が13個

以上の結果から,

(10gの球の個数, 20gの球の個数, 60gの球の個数)

= (9個, 2個, 2個), (5個, 7個, 1個), (1個, 12個, 0個) です。

- ② ①の選び方の中で, 60gの球の個数が2番目に多いのは,

10gの球が5個, 20gの球が7個, 60gの球が1個の場合。

(ア), (ウ)から10gの球の数字と60gの球の数字はどれも4の倍数なので,

選んだ13個の数字の合計を4で割ると2余るとき, (イ)から選ぶ7個の数字の合計が4で割ると2余る数となる。

(イ)の数を大きい方から7個選んで足すと

$$100 + 97 + 94 + 91 + 88 + 85 + 82 = (10 + 82) \times 7 \div 2 = 637 \text{ で,}$$

$$637 \div 4 = 159 \text{ 余り } 1 \text{ となるので, 不適当。}$$

82の替わりに79とすると

$$100 + 97 + 94 + 91 + 88 + 85 + 79 = 637 - 3 = 634, \quad 634 \div 4 = 158 \text{ 余り } 2 \text{ となり適する。}$$

よって, (イ)から選ぶ7個の数字の合計の最大値は634。

また, (ア)から選ぶ5個の数字の合計の最大値は

$$100 + 96 + 92 + 88 + 84 = (100 + 84) \times 5 \div 2 = 460。$$

(ウ)から選ぶ1個の数字の最大値は100 となるので、
10g, 20g, 60gの球の数字の合計の最大値は
 $460 + 634 + 100 = \underline{1194}$ です。

Soshibisha