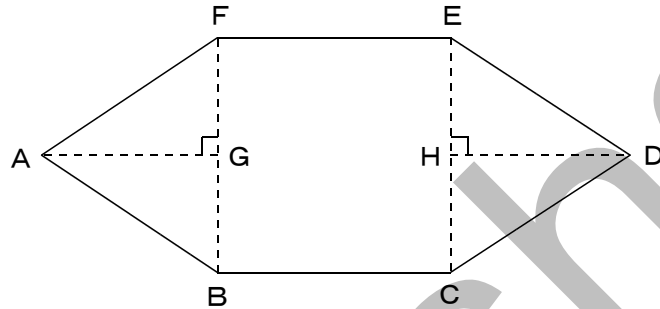


2020年度 早稲田大学高等学院中学部(問題)

(50 分)

4

机の上に、図のような形の折り紙が 1 枚置かれています。左側の三角形 ABF と、右側の三角形 CDE は互いに合同な二等辺三角形であり、四角形 $BCFE$ は正方形でその 1 辺の長さは 5cm よりも長く 10cm よりも短いとします。 AG と BF 、 DH と CE はそれぞれ垂直で、 $AG = DH = 5\text{cm}$ です。



折り紙の左右の三角形 ABF 、 CDE の部分を、それぞれ BF 、 CE のところで、折って正方形 $BCFE$ の上に重ねる作業をします。ただし、折り紙の厚みは考えず、折るときに折り目以外の部分はまがったりしないものとします。また、円周率は 3.14 とします。次の問いに答えなさい。

- (1) 折り紙を、 BF を折り目として折って、左側の三角形を正方形 $BCFE$ の上に重ねました。このとき、点 A が動いた長さを求めなさい。
- (2) 折り紙を、 BF と CE を折り目として、それぞれを同時に一定の同心速さで折り始めると、机から 2.5cm の高さのところで左側の三角形の点 A と右側の三角形の点 D がぶつかったので、そこで折るのをやめました。このとき、折り始めてからぶつかるまでに点 A が動いた長さを求め、その値を仮分数で答えなさい。

次に、折り紙を折って三角形の部分を正方形の上に重ねた後、折る前の状態にもどすまでの作業を「往復」と呼ぶことにします。往復は、左右同時に始めて 2 つの三角形が接触するまでくりかえし、接触したところで往復をやめます。ただし、左右の三角形はそれぞれ一定の速さで動き、左側の三角形は右側の三角形よりも速く動くものとします。また、接触とは、左右の折り紙が、重なったりぶつかったりすることをいいます。次の問いに答えなさい。

- (3) 1 回往復するのに、左側の三角形は 4 秒、右側の三角形は 12 秒かかるものとします。このとき、2 つの三角形が同時に往復を始めてから接触してとまるまでに何秒かかるか、式や考え方を書いて求めなさい。
- (4) 1 回往復するのに、左側の三角形は 4 秒かかる速さのままで、右側の三角形の速さだけを変えて、折る前の状態から同時に往復を始めました。このとき、往復を開始してから 16 秒以内に左右の三角形が同時に再び折る前の状態にもどることが 1 回だけあり、その後も接触せずに往復を続けました。このような 2 つの三角形について、1 回往復あたりの速さの比を、もっとも簡単な整数の比で表しなさい。

2020年度 早稲田大学高等学院中学部(解説)

4

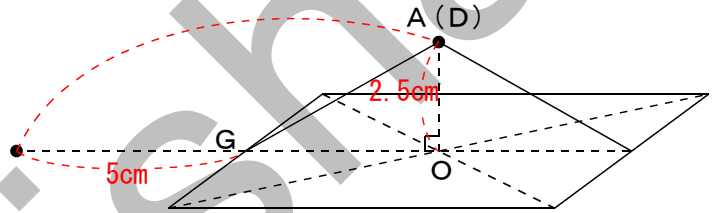
- (1) 点 A は半径 5cm の半円の弧を動くので、動いた長さは

$$5 \times 2 \times 3.14 \times \frac{1}{2} \\ = 5 \times 3.14 = \underline{15.7\text{cm}} \text{ です。}$$

- (2) 正方形の対角線の交点を O とすると、

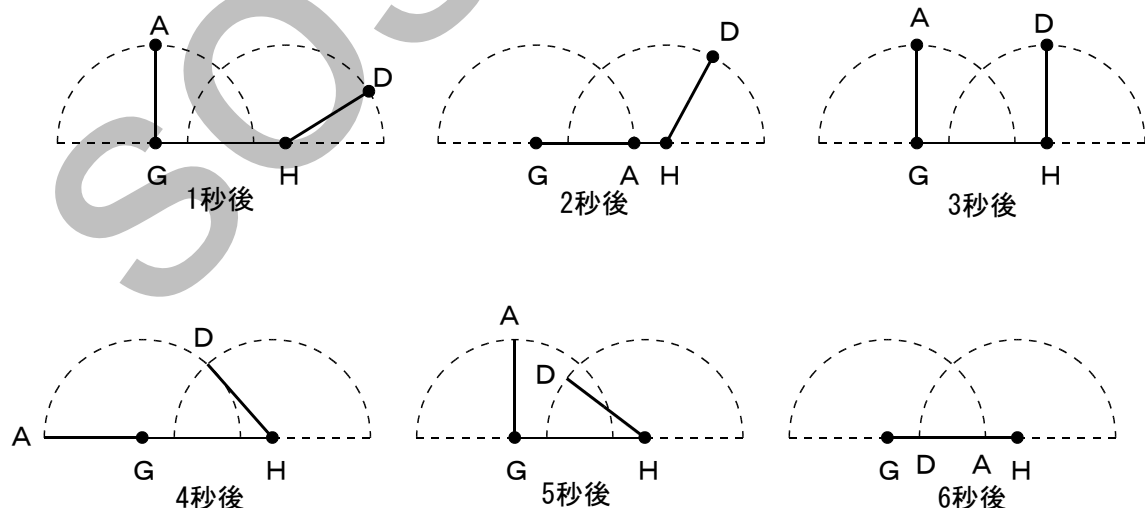
右図で、直角三角形 A G O は
 $AG : AO = 5 : 2.5 = 2 : 1$
 なので、正三角形の半分の形。
 よって、角 A G O = 30 度
 なので、点 A は半径 5cm、
 中心角 $180 - 30 = 150$ 度の
 おうぎ形の弧を動く。
 よって、動いた長さは

$$5 \times 2 \times 3.14 \times \frac{150}{360} = \frac{25}{6} \times \frac{314}{100} = \frac{157}{12} = 13\frac{1}{12} \text{ cm} \text{ です。}$$



- (3) 1 秒間に回転する角度は、

左側の三角形が $180 \times 2 \div 4 = 90$ 度、右側の三角形が $180 \times 2 \div 12 = 30$ 度なので、往復を始めてから、1 秒ごとのようすを正面から見た図で調べると、



…のようになるので、接触するまで 6 秒 かかります。

- (4) 16 秒以内で、左側の三角形が折る前の状態に戻るのは

往復を始めてから、4, 8, 12, 16 秒後。

右側の三角形が往復を始めてから 16 秒以内に折る前の状態に戻るのは

これらのうちのどれか。また、1 往復にかかる時間はこれらの約数で 4 秒より長い

ので、1 往復にかかる時間は 6, 8, 12, 16 秒のどれか。

6, 8 秒は、16 秒以内で、左右の三角形が同時に折る前の状態に戻るのが 2 回になるので不適当。

また、12 秒も (3) より、不適当。

1 往復にかかる時間が 16 秒のとき・・

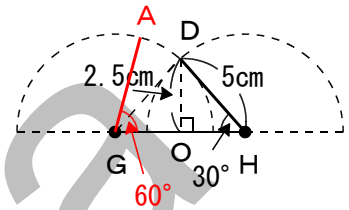
右側の三角形が正方形上にくるのは $16 \div 2 = 8$ 秒後で、このとき、
 $8 = 4 \times 2$ より、右側の三角形は折る前の状態にあるので、2 つの三角形は接触しない。

また、D が回転する速さは $360 \div 16 = 22.5^\circ / \text{秒}$

なので、D が右図の位置にくるのは

往復を始めてから $(180 - 30) \div 22.5$

$$= 150 \div 22.5 = 300 \div 45 = \frac{300}{45} = \frac{20}{3} \text{ 秒後。}$$



A が回転する速さは $360 \div 4 = 90^\circ / \text{秒}$ なので、このとき

$$A \text{ は往復を始めてから } 90 \times \frac{20}{3} = 600^\circ = 180 \times 3 + 60^\circ \text{ 回転している}$$

ので、右上図の位置にある。つまり、左右の三角形は、正方形上以外でも接触しないので、適する。

以上の結果から、右側の三角形が 1 往復にかかる時間は 16 秒。

よって、左右の三角形が 1 往復にかかる時間の比は $4 : 16 = 1 : 4$ なので、

1 往復あたりの速さの比はこの逆比で 4 : 1 です。