2020年度　早稲田中学校（問題）

5　図１のような１辺の長さが 1cm の立方体ＡＢＣＤＥＦＧＨから「頂点を切り落とす」ことを考えます。たとえば「頂点Ｂを切り落とす」とは，３点Ａ，Ｃ，Ｆを通る平面で立方体を切断し，点Ｂを含む方を取り除くことを言います。同じように，「頂点Ｈを切り落とす」とは，３点Ｄ，Ｅ，Ｇをい通る平面で立方体を切断し，点Ｈを含む方を取り除くことを言います。例として，２つの頂点Ｂ，Ｈを同時に切り落としてできる立体は図２のようになります。次の問いに答えなさい。

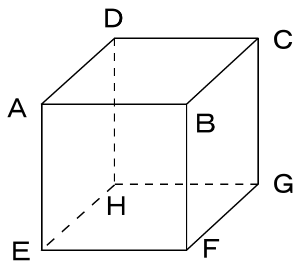


図１

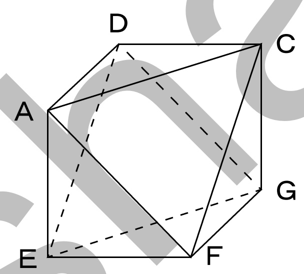
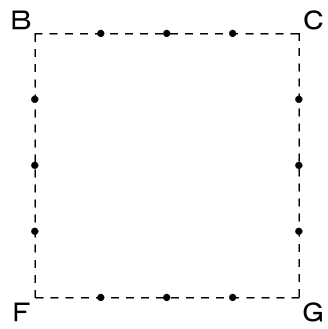


図２

(1)　立方体ＡＢＣＤＥＦＧＨから２つの頂点Ｂ，Ｈを同時に切り落としてできる立体の体積は何cm^{3}ですか。

(2)　立方体ＡＢＣＤＥＦＧＨから４つの頂点Ａ，Ｂ，Ｇ，Ｈを同時に切り落としてできる立体について，

①　この立体の表面を黒く塗って，面ＢＦＧＣの方向から見たとき，黒く塗られている部分を解答らんの図にかき込み，斜線で示しなさい。ただし，辺上の点は各辺を等分した点です。



②　この立体の体積は何cm^{3}ですか。

(3)　立方体ＡＢＣＤＥＦＧＨから８つの頂点Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄ，Ｅ，Ｆ，Ｇ，Ｈを同時に切り落としてできる立体の体積は何cm^{3}ですか。

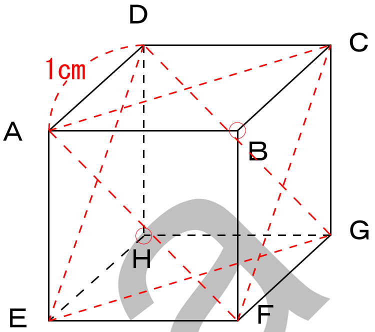
2020年度　早稲田中学校(解説)

5

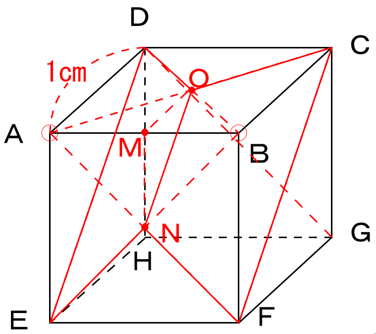
(1)　頂点B，Hを同時に切り落としてできる立体の体積は

$$1\times1\times1-\left(1\times1\times\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{3}\right)\times2$$

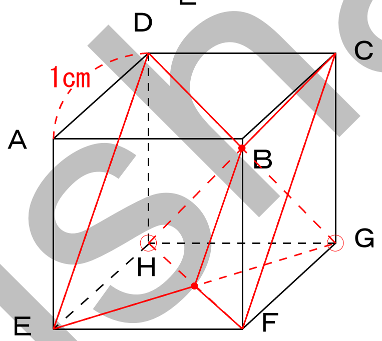
$$=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\text{cm}^3$$ です。



(2)　①

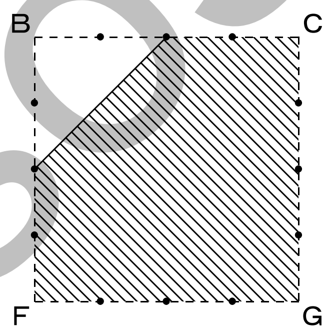


(図あ)

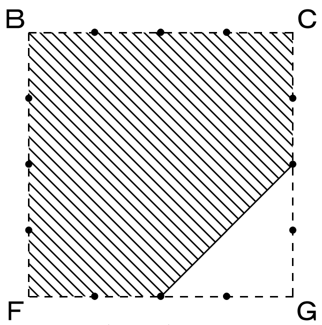


(図い)

A，Bを切り落としてできるのが上の(図あ)で，
G，Hを切り落としてできるのが上の(図い)。
(図あ)では斜線部分の面の後ろ側が残り，(図い)では斜線部分の手前側が残るので，それぞれ残った部分を黒く塗り，面BFGCの方向から見て斜線で表すと，(図あ)では(図う)，(図い)では(図え)のようになる。

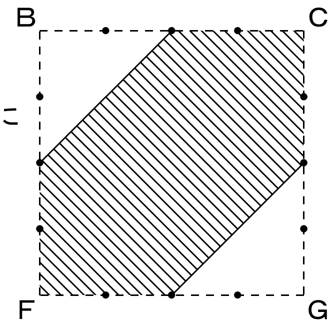


(図う)



(図え)

よって，A，B，G，Hを同時に切り落とした立体を面BFGCの方向から見て斜線で表すと，右図のようになります。



② （図あ）で辺ＡＢのまん中の点をＭ，ＡＦとＢＥの交点をＮ，
ＡＣとＢＤの交点をＯとすると，三角すいＡーＭＮＯと三角すいＡーＢＦＣ
は相似で相似比は１：２なので，体積比は $1\times1\times1:2\times2\times2=1:8$。
また，三角すいＡーＢＦＣの体積が $1\times1\times\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ cm³ なので，
三角すいＡーＭＮＯの体積は $\frac{1}{6}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{48}$ となる。
よって，三角すい台ＭＮＯーＢＦＣの体積は $\frac{1}{6}-\frac{1}{48}=\frac{7}{48}$ cm³ となり，
求める立体の体積はもとの立方体からこの三角すい台と合同な三角すいを４個
取り除いたものなので，$1-\frac{7}{48}\times4=1-\frac{7}{12}=\underline{\frac{5}{12}\text{ cm}^3}$ です。

(3) 立方体ＡＢＣＤＥＦＧＨから８つの頂点を同時に切り落とした立体は
立方体の６つの面の正方形の中心（対角線の交点）を結んでできる
右のような立体（正八面体）になる。
つまり，底面積が $1\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ cm² で，
高さが $1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ cm の四角すいが，上下に
２つくっついた立体になるので，体積は
$\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\right)\times2=\underline{\frac{1}{6}\text{ cm}^3}$ です。