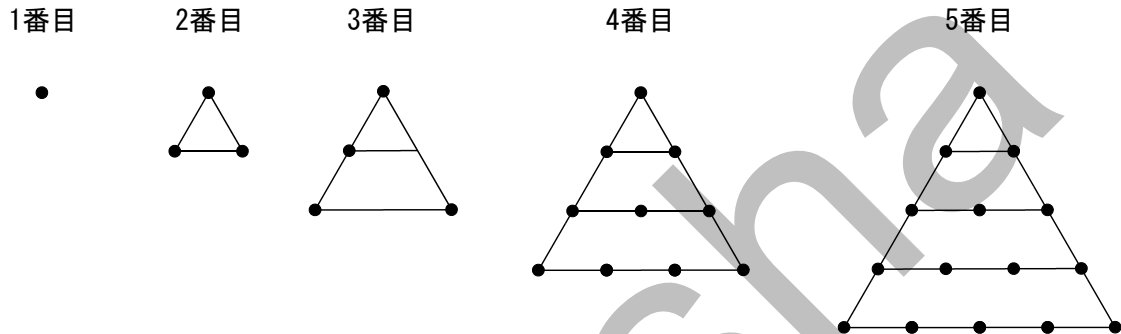


2020年度 サレジオ学院中学校(問題)

4

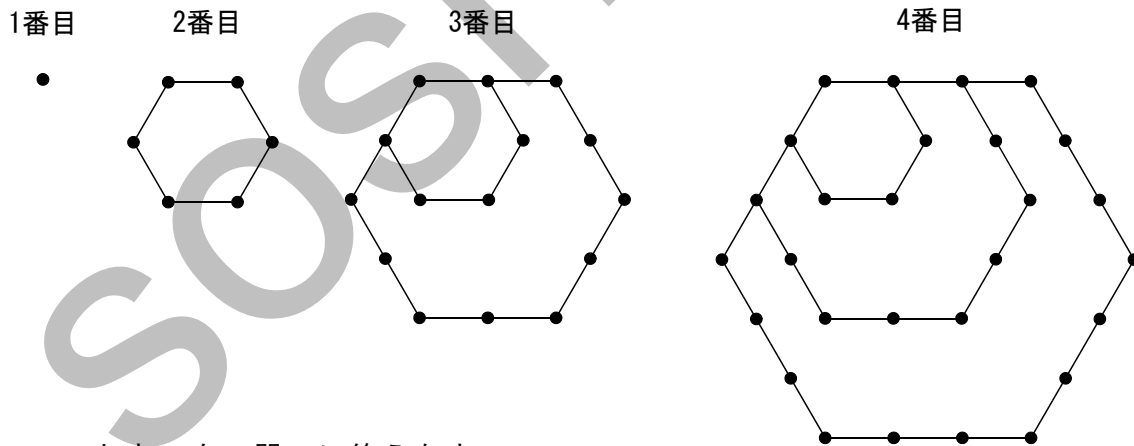
下図のように、1 番目に 1 つの点を置き、2 番目以降、大きさの異なる正三角形の形に点を並べていきます。このように、点を並べたときの点の個数を「三角数」といいます。

例えば、2 番目の三角数は 3、3 番目の三角数は 6 です。



また、下図のように、1 番目に 1 つの点を置き、2 番目以降、大きさの異なる正六角形の形に点を並べていきます。このように点を並べたときの点の個数を「六角数」といいます。

例えば、2 番目の六角数は 6、3 番目の六角数は 15 です。



このとき、次の問いに答えなさい。

- (1) 20 番目の三角数はいくつですか。
- (2) 20 番目の六角数はいくつですか。
また、その数は何番目の三角数と同じですか。
- (3) すべての六角数は三角数となります。その理由を答えなさい。

2020年度 サレジオ学院中学校(解説)

4

(1) $1 + 2 + 3 + \cdots + 20 = (1 + 20) \times 20 \div 2 = \underline{210}$ です。

(2) N 番目の三角数を $\triangle N$, N 番目の六角数を $\hexagon N$ と表すと,

$$\hexagon 1 = \triangle 1$$

$$\hexagon 2 = \hexagon 1 + 5 = \triangle 1 + 2 + 3 = \triangle 3$$

$$\hexagon 3 = \hexagon 2 + 9 = \triangle 3 + 4 + 5 = \triangle 5$$

$$\hexagon 4 = \hexagon 3 + 13 = \triangle 5 + 6 + 7 = \triangle 7 \quad \text{のようになるので,}$$

六角数は 奇数番目の三角数に等しくなる。

20 番目の奇数は $2 \times 20 - 1 = 39$ なので,

20 番目の六角数は 39 番目の三角数 に等しい。

よって, 20 番目の六角数は $1 + 2 + \cdots + 39 = (1 + 39) \times 39 \div 2 = \underline{780}$ です。

(3) 右図のように, 区切っていくと,
六角数は $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots$
と自然数の和の形に表せるから
三角数となる。

