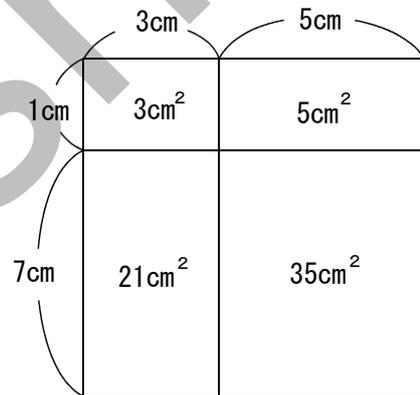


## 2020年度 桐朋中学校(問題)

- 7 次の3つの条件㉠～㉣がすべて成り立つように、正方形を2本の直線によって4つの長方形に切り分けます。

- ㉠ 長方形の辺の長さを cm で表すと、辺の長さはすべて整数となる。
- ㉡ 4つの長方形の面積はすべて異なる。
- ㉣ 4つの長方形の面積を小さい順に  $a \text{ cm}^2$ 、 $b \text{ cm}^2$ 、 $c \text{ cm}^2$ 、 $d \text{ cm}^2$  とすると、 $a$  と  $d$  の最大公約数は1、 $b$  と  $c$  の最大公約数も1である。

たとえば、正方形の1辺の長さが8cmのとき、右の図のように4つの長方形に切り分けると、 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$ はそれぞれ3、5、21、35であり、3と35の最大公約数は1で、5と21の最大公約数も1です。



- (1) 正方形の1辺の長さが21cmのとき、 $d$ の値はいくつですか。
- (2) 正方形の1辺の長さが18cmのとき、 $d$ の値はいくらですか。考えられるものをすべて書きなさい。
- (3)  $d$ の値が255のとき、正方形の1辺長さは何cmですか。

## 2020年度 桐朋中学校(解説)

7

- (1) 右図でアは  $a$  の約数, イ, エは  $d$  の約数で,  
 $a$  と  $d$  の最大公約数は 1 なので,  
 アとイ, エに 1 以外の公約数はない。  
 同様に, ウとイ, エに 1 以外の公約数はない。  
 アとイ, ウとエに 1 以外の公約数はないこと  
 着目すると, 右図の場合  $ア < イ$ ,  $ウ < エ$  なので,  
 正方形の 1 辺の長さが  $12\text{cm}$  のとき,

$12 = 1 + 11$  または  $12 = 5 + 7$  より,

(ア, イ, ウ, エ) = (1, 11, 1, 11),

(1, 11, 5, 7),

(5, 7, 1, 11),

(5, 7, 5, 7) となるが,

(1, 11, 1, 11) のとき, 4 つの長方形の面積は  $1 \times 1 = 1\text{cm}^2$ ,  $1 \times 11 = 11\text{cm}^2$ ,  
 $11 \times 1 = 11\text{cm}^2$ ,  $11 \times 11 = 121\text{cm}^2$  となり, 2 つの面積が同じに  
 なるので不適當。

同様に, (5, 7, 5, 7) も不適當。

また, (1, 11, 5, 7) のとき 4 つの長方形の面積は

$1 \times 5 = 5\text{cm}^2$ ,  $1 \times 7 = 7\text{cm}^2$ ,  $11 \times 5 = 55\text{cm}^2$ ,  $11 \times 7 = 77\text{cm}^2$   
 となるので,  $d = 77$ 。

(5, 7, 1, 11) のときも同様に  $d = 77$ 。

よって,  $d = \underline{77}$  です。

- (2) 正方形の 1 辺の長さが  $18\text{cm}$  のとき,  $ア < ウ$  とすると,

$18 = 1 + 17$ ,  $18 = 5 + 13$ ,  $7 + 11$ , より,

(ア, イ, ウ, エ) = (1, 17, 5, 13),

(1, 17, 7, 11),

(5, 13, 7, 11) で,

(1, 17, 5, 13) のとき,  $d = 17 \times 13 = 221$ 。

(1, 17, 7, 11) のとき,  $d = 17 \times 11 = 187$ 。

(5, 13, 7, 11) のとき,  $d = 13 \times 11 = 143$ 。

よって,  $d = \underline{143, 187, 221}$  です。

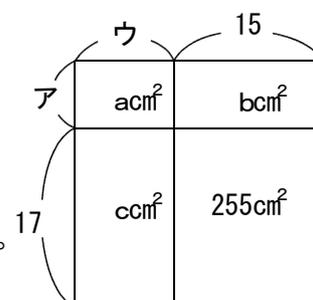
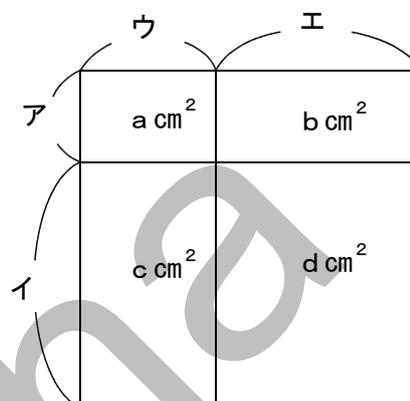
- (3)  $d = 255$  を素因数分解すると,  $255 = 3 \times 5 \times 17$ ,

$d = 15 \times 17$  として, 右図のように考えると,

ウはアより 2 大きいので偶奇は一致。アは  $b$  の約数,  
 ウが  $c$  の約数なので, ア, ウに 1 以外の公約数はない。

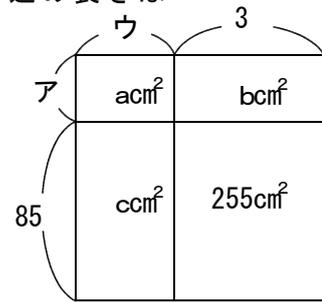
よって, ア, ウはともに奇数なので

(ア, ウ) = (1, 3), (3, 5), (5, 7), (7, 9), (9, 11),

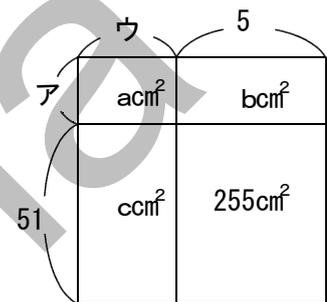


(11, 13) となるが、ア、ウは 15 と 1 以外の公約数を持たないので、  
 (ア, ウ) = (11, 13) だけが適する。このとき、正方形の 1 辺の長さは  
 $11 + 17 = 28\text{cm}$ 。

次に、 $d = 3 \times 85$  として、右図のように考えると  
 ウは 2 以下となり、正方形の 1 辺は  $2 + 3 = 5\text{cm}$   
 以下となる。つまり、85cm 未満になるので、  
 不適當。



次に、 $d = 5 \times 51$  として、右図のように考えると、  
 ウは 4 以下となり、正方形の 1 辺は  $4 + 5 = 9\text{cm}$   
 以下となる。つまり 51cm 未満となるので、  
 不適當。



以上の結果から正方形の 1 辺の長さは 28cm です。