

2018年度 浦和明の星女子中学校(問題)

5

星子さんは

9×9 , 99×99 , 999×999 , 9999×9999 , 99999×99999

を計算してみたところ、計算結果に規則性があることに気が付きました。

以下の問いに答えなさい。

(1) 999×999 を計算しなさい。

(2) 各^{かくく}位の数がすべて9である100桁^{けた}の数を a とすると、 $a \times a$ を計算した結果の数について、各位の数の和を求めなさい。

(3) 各位の数がすべて3である100桁の数を b とします。このとき、次の計算をした結果の数について、各位の数の和を求めなさい。

(7) $b \times b$ (2) $b \times b \times 2$

2018年度 浦和明の星女子中学校(解説)

5

(1) $999 \times 999 = \underline{998001}$ です。

(2) $9 \times 9 = 81$, $99 \times 99 = 9801$, $999 \times 999 = 998001$,
 $9999 \times 9999 = 99980001$, ...となる。つまり,
 各位がすべて9である数を2回かけると計算結果に現れる0以外の数は
 9と8と1でこれらの個数を(9の個数, 8の個数, 1の個数)と
 表すと, かける数が
 1桁のとき...(0, 1, 1), 2桁のとき...(1, 1, 1), 3桁のとき...(2, 1, 1),
 4桁のとき...(3, 1, 1), ...となるので,
 100桁のときは $(100 - 1, 1, 1) = (99, 1, 1)$ 。
 よって, これらの数の和は $9 \times 99 + 8 + 1 = 891 + 8 + 1 = \underline{900}$ です。

(3)

(7) 各位の数がすべて3である数を2回かけると, かける数が
 1桁のとき... $3 \times 3 = 9$, 2桁のとき... $33 \times 33 = 1089$,
 3桁のとき... $333 \times 333 = 110889$,
 4桁のとき... $3333 \times 3333 = 11108889$, ...となるので,
 計算結果に現れる0以外の数は1と8と9で, これらの個数を
 (9の個数, 8の個数, 1の個数)と表すと, かける数が
 1桁のとき...(1, 0, 0), 2桁のとき...(1, 1, 1),
 3桁のとき...(1, 2, 2), 4桁のとき...(1, 3, 3)となるので,
 100桁のとき, つまり $b \times b$ では $(1, 100 - 1, 100 - 1) = (1, 99, 99)$ 。
 よって, これらの数の和は
 $9 + 8 \times 99 + 1 \times 99 = 9 + (8 + 1) \times 99 = 9 + 9 \times 99$
 $= 9 \times 100 = \underline{900}$ です。

(イ) (7)から

$b \times b$ は, 上の位から

$1 \cdots 1$ (99個), 0, $8 \cdots 8$ (99個), 9 と数が並ぶ。よって,

$b \times b \times 2$ の計算結果は, 上の位から

$2 \cdots 2$ (99個), 1, $7 \cdots 7$ (99個), 8 と数が並ぶ。

よって, これらの数の和は

$$\begin{aligned} 2 \times 99 + 1 + 7 \times 99 + 8 &= (2 + 7) \times 99 + (1 + 8) \\ &= 9 \times 99 + 9 = 9 \times 100 = \underline{900} \text{ です。} \end{aligned}$$